Problema de Calderón, de Gel'fand y transformada de Radon

Felipe Labra Irribarra

Seminario de Análisis Microlocal.

29 de Agosto de 2025

Contents

1 Transformada de Radon

2 Problema de Gelfand

Contents

1 Transformada de Radon

2 Problema de Gelfand

Transformada de Radon y de rayos X

La transformada de rayos X If de una función f que toma valores en $\mathbb{R}^n$ estudia la integral de f sobre lineas rectas, mientras que la transformada de Radon Rf estudia la integral de f sobre planos $(n-1)$ dimensionales. En el caso $n = 2$, las dos transformadas coinciden, por lo que nos quedaremos en ese supuesto.

Parametrizaremos líneas en $\mathbb{R}^2$ a partir de su vector director ω y distancia s del origen.

Definition

Si $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2)$, la transformada de Radon de f es la función

$$Rf(s,\omega) := \int_{-\infty}^{\infty} f(s\omega^\perp + t\omega)dt, \quad s \in \mathbb{R},\ \omega \in \mathbb{S}^1.$$

Aquí $\omega^\perp$ es el vector de $\mathbb{S}^1$ que resulta de rotar ω con un ángulo $\pi/2$ en el sentido antihorario

Propiedades

Theorem (Fourier slice theorem)

Para $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2)$ se cumple que

$$\widehat{(Rf)}(\sigma, \omega) = \hat{f}(\sigma\omega^\perp), \quad \sigma \in \mathbb{R},\ \omega \in \mathbb{S}^1.$$

Corollary

Si $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2)$ es tal que $Rf \equiv 0$, entonces $f \equiv 0$.

¿Cómo invertir este operador, de otra forma? Veremos el método de proyección retrógrada. Por lo que el operador viene dado por

$$R^* : C^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{S}^1) \to C^\infty(\mathbb{R}^2), \quad R^*h(y) = \int_{\mathbb{S}^1} h(y \cdot \omega^\perp, \omega) d\omega.$$

Propiedades

Theorem (Operador normal)

Se tiene que

$$R^*R = 4\pi|D|^{-1} = \mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{4\pi}{|\xi|}\mathcal{F}(\cdot)\right\},$$

por lo que f se puede recuperar a partir de Rf por la fórmula

$$f = \frac{1}{4\pi}|D|R^*Rf.$$

En la práctica, esta fórmula es eficiente a la hora de implementar, y suele ser una buena herramienta para el problema de reconstrucción cuando uno tiene la información completa de rayos X con relativamente poco ruido. En particular,

$$\text{sing supp}(R^*Rf) = \text{sing supp}(f).$$

Visibilidad de singularidades

Si $\mathcal{A}$ es un conjunto abierto de líneas en $\mathbb{R}^2$, definimos

Definition

Una singularidad (x_0, ξ_0) se dice visible desde $\mathcal{A}$ si la línea que pasa por x_0 en dirección ξ_0 está en $\mathcal{A}$.

1. Si (x_0, ξ_0) es visible desde $\mathcal{A}$, entonces desde las singularidades de $Rf\,|_{\mathcal{A}}$ uno puede determinar para cualquier α si (x_0, ξ_0) forma parte de $\mathrm{WF}^{\alpha}(f)$. Si $Rf\,|_{\mathcal{A}}$ determina únicamente f, entonces uno espera que la reconstrucción de singularidades visibles sea estable.
2. Si (x_0, ξ_0) no es visible desde $\mathcal{A}$, entonces esta singularidad es suavizada por la medición $RF\,|_{\mathcal{A}}$. Incluso si $Rf\,|_{\mathcal{A}}$ pudiese determinar f de manera única, la inversión no es Lipschitz en ninguna norma de Sobolev.

Contents

1 Transformada de Radon

2 Problema de Gelfand

Planteo del problema

Problema de Gelfand: ¿Es posible determinar la estructura interior de la tierra a partir de controlar ondas acústicas y midiendo vibraciones acústicas y midiendo vibraciones en la superficie?

$q \in C_c^\infty(\Omega)$ es un potencial con $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ es una bola. Tomaremos mediciones hasta tiempo $T > 0$ y consideraremos la amplitud $f(x,t)$ en $\partial\Omega \times (0,T)$. Buscamos soluciones del sistema

$$\begin{cases} (\Box + q)u = 0, & \Omega \times (0,T), \\ u = f, & \partial\Omega \times (0,T), \\ u = \partial_t u = 0, & \Omega \times \{t = 0\}. \end{cases} \tag{1}$$

Para cualquier $f \in C_c^\infty(\partial\Omega \times (0,T))$, existe una única solución $u \in C^\infty(\Omega \times (0,T))$

Operador Dirichlet-Neumann y enunciado del Teorema

las mediciones ideales desde la frontera se encuentran codificadas mediante el operador Dirichlet-Neumann:

$$\Lambda_q : C_c^\infty(\partial\Omega \times (0,T)) \to C^\infty(\partial\Omega \times (0,T)), \quad \Lambda_q(f) = \partial_\nu u \,|_{\partial\Omega\times(0,T)}\,.$$

El problema de Gelfand para este modelo trata de recuperar $q(x)$, conociendo de antemano el mapa Λ_q. La idea es demostrar el siguiente resultado

Theorem (Recuperando la transformada de rayos X)

Sea $T > 0$ y suponga que $q_1, q_2 \in C_c^\infty(\Omega)$. Si $\Lambda_{q_1} = \Lambda_{q_2}$, entonces q_1 y q_2 satisfacen

$$\int_\gamma q_1 ds = \int_\gamma q_2 ds,$$

siempre que γ sea un segmento de recta maximal en $\overline{\Omega}$ con largo menor a T.

Consecuencia y argumentos previos

Corollary

Si $T > \operatorname{diam}(\Omega)$, *entonces* $\Lambda_{q_1} = \Lambda_{q_2}$ *implica* $q_1 \equiv q_2$.

Lemma (Identidad integral)

Suponga que $q_1, q_2 \in C_c^\infty(\Omega)$. *Para todo* $f_1, f_2 \in C_c^\infty(\partial\Omega \times (0,T))$,

$$((\Lambda_{q_1} - \Lambda_{q_2})f_1, f_2)_{L^2(\partial\Omega\times(0,T))} = \int_\Omega \int_0^T (q_1 - q_2) u_1 \overline{u_2} dt dx,$$

donde u_1 *resuelve el problema de ondas 1 con potencial* q_1 *y condición de frontera* f_1 *y* u_2 *resuelve un problema análogo con dato de Cauchy en* $\{t = T\}$ *dado por*

$$\begin{cases} (\Box + q)u_2 = 0, & \Omega \times (0,T), \\ u_2 = f_2, & \partial\Omega \times (0,T), \\ u_2 = \partial_t u_2 = 0, & \Omega \times \{t = T\}. \end{cases} \tag{2}$$

Argumento técnico

La idea es construir soluciones de la ecuación de ondas que se concentren en las curvas $s \mapsto (\gamma(s), s)$ donde γ es una curva. En esencia, la propiedad clave para demostrar el Teorema es

Proposición

Proposition (Soluciones que se concentran)

Suponga que $q \in C_c^\infty(\Omega)$ *y sea* $\gamma : [\delta, L] \to \overline{\Omega}$ *un segmento de recta maximal en* $\overline{\Omega}$ *con* $0 < \delta < L < T$. *Para cualquier* $\lambda \geq 1$, *existe solución* $u = u_\lambda$ *de* $(\Box + q)u = 0$ *en* $\Omega \times (0, T)$ *tal que* $u = \partial_t u = 0$ *en* $\{t = 0\}$, *de modo que para cualquier* $\psi \in C_c^\infty(\Omega \times [0, T])$ *uno tenga*

$$\lim_{\lambda \to \infty} \int_\Omega \int_0^T \psi |u|^2 dx dt = \int_\delta^T \psi(\gamma(s), s) ds.$$

Más aún, si $\tilde{q} \in C_c^\infty(\Omega)$, *entonces existe una solución* $\tilde{u} = \tilde{u_\lambda}$ *de* $(\Box + \tilde{q})\tilde{u} = 0$ *en* $\Omega \times (0, T)$ *con* $\tilde{u} = \partial_t \tilde{u} = 0$ *sobre* $\{t = T\}$ *de modo que para cualquier* $\psi \in C_c^\infty(\Omega \times [0, T])$, *se tenga*

$$\lim_{\lambda \to \infty} \int_\Omega \int_0^T \psi u \overline{\tilde{u}} dt dx = \int_\delta^T \psi(\gamma(s), s) ds.$$

Demostración del teorema

Suponga $\Lambda_{q_1} = \Lambda_{q_2}$. Por la identidad integral tenemos que

$$\int_\Omega \int_0^T (q_1 - q_2) u_1 \overline{u_2} dt dx = 0,$$

donde u_j es solución de $(\Box + q_j)u_j = 0$ en $\Omega \times (0, T)$ de modo que $u_1 = \partial_t u_1 = 0$ en $\{t = 0\}$ y $u_2 = \partial_t u_2 = 0$ en $\{t = T\}$.

Sea $\gamma : [\delta, L] \to \overline{\Omega}$ un segmento de recta maximal de velocidad 1 en $\overline{\Omega}$ con $L < T$, y sea $u_1 = u_{1,\lambda}$ la solución construida por la proposición anterior para el potencial q_1 y $u_2 = u_{2,\lambda}$ la solución con potencial q_2 con condición final 0 en $\{t = T\}$. Tomando el límite $\lambda \to \infty$ en la ecuación anterior y tomando $\psi(x, t) = (q_1 - q_2)(x)$, obtenemos

$$\lim_{\lambda \to \infty} \int_\Omega \int_0^T \psi u \tilde{\overline{u}} dt dx = \int_\delta^T (q_1 - q_2)(\gamma(s)) ds = 0,$$

por tanto las integrales de q_1 y q_2 sobre un segmento de línea maximal de largo menor a T coinciden en $\overline{\Omega}$.

Sketch demostración proposición

En esencia, la demostración es similar a la del problema de Calderón.

1. Imponer un Ansatz de la forma

$$v(x,t) = e^{i\lambda\varphi(x,t)}a(x,t),$$

donde queremos determinar φ y a que satisfagan $(\Box + q)v = O(\lambda^{-1})$. Buscar anular el símbolo principal que posee término λ^2.

$$|\nabla_x\varphi|^2 - (\partial_t\varphi)^2 = 0.$$

2. Hacer un cambio de coordenadas que transforme el operador de orden λ^1 en un operador diferencial con respecto a una única variable. Resolver un sistema de ecuaciones para construir la solución aproximada.
3. Encontrar una solución exacta, i.e, escribir $u = v + r$ donde r resuelve la ecuación de ondas con un lado derecho F_λ es controlable uniformemente con respecto a λ.
4. Concluir, construyendo una cut-off que dependa de λ.

1. Ansatz y símbolo principal

Imponemos un Ansatz de la forma

$$v(x,t) = e^{i\lambda\varphi(x,t)}a(x,t),$$

donde queremos determinar φ y a que satisfagan $(\Box + q)v = O(\lambda^{-1})$. Reemplazando se tiene

$$(\Box + q)(e^{i\lambda\varphi}a) = e^{i\lambda\varphi}\left[\lambda^2\left(|\nabla_x\varphi|^2 - (\partial_t\varphi)^2\right)a + \right.$$
$$\left. + i\lambda[2\partial_t\varphi\partial_t a - 2\nabla_x\varphi\cdot\nabla_x a + (\Box\varphi)a] + (\Box + q)a\right].$$

Apuntamos a anular el símbolo principal. Es decir, pedimos que φ resuelva la ecuación eikonal

$$|\nabla_x\varphi|^2 - (\partial_t\varphi)^2 = 0.$$

Basta tomar

$$\varphi(x,t) = t - x_n.$$

Con eso se tiene

$$(\Box + q)(e^{i\lambda\varphi}a) = e^{i\lambda\varphi}\left[i\lambda(La) + (\Box + q)a\right], \quad L := 2(\partial_t + \partial_{x_n})$$

donde L es el campo vectorial constante.

2. Cambio de coordenadas y solución del sistema

Introduzca el cambio de coordenadas

$$z = \frac{t + x_n}{2}, \quad w = \frac{t - x_n}{2},$$

de este modo, L se transforma en el operador $2\partial_z$, es decir,

$$LF(x,t) = 2\partial_z F\left(x, \frac{t + x_n}{2}, \frac{t - x_n}{2}\right),$$

donde definimos $\check{F}$ como

$$\check{F}(x', z, w) := F(x', z - w, z + w).$$

Buscamos una amplitud de la forma $a = a_0 + \lambda^{-1} a_{-1}$. Se obtiene

$$(\Box + q)(e^{i\lambda\varphi} a) = e^{i\lambda\varphi}\left[i\lambda(La_0) + [iLa_{-1} + (\Box + q)a_0] + \lambda^{-1}(\Box + q)a_{-1}\right],$$

2. Cambio de coordenadas y solución del sistema

Como buscamos $(\Box + q)v = O(\lambda^{-1})$, necesitamos anular los primeros dos término, i.e, resolver

$$\begin{cases} La_0 = 0, \\ La_{-1} = i(\Box + q)a_0. \end{cases}$$

Sea entonces $\chi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ soportada cerca de 0 y elijamos

$$\check{a}_0(x', z, w) := \chi(x', w).$$

Veremos el caso en dónde χ no depende de λ. Tomamos entonces

$$\check{a}_{-1}(x', z, w) := -\frac{1}{2i} \int_0^z ((\Box + q)a_0)\check{}(x', s, w)ds.$$

Lo que anula los términos. Esto nos deja con la ecuación

$$(\Box + q)(e^{i\lambda\varphi}a) = \lambda^{-1}e^{i\lambda\varphi}(\Box + q)a_{-1} =: F_\lambda,$$

2. Cambio de coordenadas y solución del sistema

Esto es una solución aproximada, pues por Cauchy-Schwarz obtenemos la cota

$$\begin{aligned}\|F_\lambda\|_{L^\infty(\Omega\times(0,T))} &\leq \lambda^{-1}\|(\Box + q)a_{-1}\|_{L^\infty(\Omega\times(0,T))}\\ &\lesssim \lambda^{-1}\|\chi\|_{W^{4,\infty}(\mathbb{R}^n)},\end{aligned}$$

uniforme con respecto a $\lambda \geq 1$.

3. Construcción de la solución exacta.

Buscamos $u = u_\lambda$ de la forma $u = v + r$ con r el término de corrección a controlar. Observe que para t cercano a 0, $v(\cdot, t)$ está soportada cerca de $x_0 \notin \overline{\Omega}$ y por tanto $v = \partial_t v = 0$ sobre $\{t = 0\}$. Además sabemos que $(\Box + q)v = F_\lambda$. De este modo, u es solución de la ecuación de ondas original para $f = v\,|_{\partial\Omega\times(0,T)}$ si r es solución de

$$\begin{cases} (\Box + q)r = -F_\lambda, & \Omega \times (0, T), \\ r = 0, & \partial\Omega \times (0, T), \\ r = \partial_t r = 0, & \{t = 0\}. \end{cases}$$

Este último problema está bien puesto. Se obtienen las cotas

$$\|r\|_{L^\infty((0,T);H^1(\Omega))} \lesssim \|F_\lambda\|_{L^2((0,T);L^2(\Omega))} \lesssim \lambda^{-1}\|\chi\|_{W^{4,\infty}},$$

que es uniforme con respecto a $\lambda \geq 1$.

4. Cut-off dependiente de λ.

Queremos darle forma a $\chi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$. Sea $\zeta \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ que satisface $\zeta = 1$ en una vecindad de 0 y tal que $\|\zeta\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = 1$. Defina

$$\chi(y) := \varepsilon^{-n/2}\zeta(y/\varepsilon),$$

donde $\varepsilon = \varepsilon(\lambda) = \lambda^{-1/(n+8)}$. Con esta elección, tenemos que

$$\|\chi\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = 1, \qquad \|\chi\|_{W^{4,\infty}(\mathbb{R}^n)} \lesssim \varepsilon^{-n/2-4} \lesssim \lambda^{1/2}.$$

Se sigue que

$$\|v\|_{L^2(\Omega\times(0,T))} \lesssim 1, \quad \|r\|_{L^2(\Omega\times(0,T))} \lesssim \lambda^{-1/2}.$$

Dado que $u = v + r$, la integral que queremos calcular toma la forma

$$\int_\Omega \int_0^T \psi|u|^2 dxdt = \int_\Omega \int_0^T \psi|a_0|^2 dxdt + O(\lambda^{-1/2}).$$

Aquí usamos la expresión de u, la norma compleja y que r tiene el mayor orden, que es $\lambda^{-1/2}$.

4. Cut-off dependiente de λ

Notando que $\psi|a_0|^2$ tiene soporte compacto en $\Omega \times (0, T)$, tenemos que

$$\int_\Omega \int_0^T \psi|u|^2 dxdt = \int_{\mathbb{R}^{n+1}} \psi(x,t)\varepsilon^{-n}\zeta\left(\frac{x'}{\varepsilon}, \frac{t-x_n}{2\varepsilon}\right)^2 dxdt + O(\lambda^{-1/2}),$$

que con el cambio de variables que introdujimos anteriormente, se transforma en

$$\begin{aligned}\int_\Omega \int_0^T \psi|u|^2 dxdt &= \int_{\mathbb{R}^{n+1}} \psi(x', z-w, z+w)\varepsilon^{-n}\zeta\left(\frac{x'}{\varepsilon}, \frac{w}{\varepsilon}\right)^2 dx'dzdw + \\ &= O(\lambda^{-1/2}).\end{aligned}$$

Considerando ahora el cambio de variables $(x', w) \mapsto (\varepsilon x', \varepsilon w)$, y tomando $\lambda \to \infty$ (de modo que $\varepsilon \to 0$) se tiene que

4. Cut-off dependiente de λ

$$\lim_{\lambda\to\infty}\int_\Omega\int_0^T \psi|u|^2 dxdt = \int_{\mathbb{R}^{n+1}} \psi(0',z,z)\zeta(x',w)^2 dx'dzdw$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} \psi(0',z,z)dz = \int_\delta^L \psi(x_0+se_n,s)ds$$

donde usamos que $\|\zeta\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}=1$ y el hecho de que $\psi\in C_c^\infty(\Omega\times[0,T])$. Esto prueba la igualdad buscada en primera instancia.

Para ver la segunda igualdad, dado que $\eta(T)\notin\overline{\Omega}$, tenemos que $v=\partial_t v=0$ en $\{t=T\}$ y podemos pedir que r resuelva la ecuación de ondas pero con condiciones $r=\partial_t r=0$ en $\{t=T\}$ y cambiar el potencial q por $\tilde{q}$. Como φ y a_0 son independientes de q, el mismo argumento aplica, terminando la demostración.