ECUACIÓN DE LAPLACE Y DESIGUALDAD DE HARNACK

FELIPE LABRA

Abstract.

1. Sobre la ecuación de Laplace

Dado $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ acotado y al menos Lipschitz (es decir, podemos considerar Ω con frontera C^∞ de ser necesario), queremos resolver el siguiente problema de Dirichlet

$$\begin{cases} -\Delta u = 0, & \Omega, \\ u = g & \partial\Omega. \end{cases} \tag{1}$$ {{DirichletPro

Aquí, el dato g en la frontera es conocido. Entonces el problema de Dirichlet tiene única solución. Una buena propiedad que satisface el Laplaciano es que es el único operador diferencial de orden 2 que es invariante bajo traslaciones y rotaciones.

Más aún, satisface la siguiente propiedad de la media: para $w \in C^2(\Omega)$,

$$\Delta w(x) = \lim_{r\to 0} \frac{c_n}{r^2}\{\fint_{B_r(x)} (w(y) - w(x))\},$$

para alguna constante c_n, que es el volumen de la bola en $\mathbb{R}^n$. Por el Teorema de la divergencia y la fórmula de coarea, se tiene

$$\frac{n}{r}\frac{d}{dr}\fint_{\partial B_r(x)} w d\sigma = \fint_{B_r(x)} \Delta w.$$

1.1. Existencia de solución: métodos de energía.

La idea es ver problemas de EDP como problemas de optimización de un funcional con restricciones. En el caso del problema de Dirichlet,

$$\mathcal{E}(u) := \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 dx, \qquad u\mid_{\partial\Omega} = g,$$

donde queremos buscar un minimizador. La restricción permite que u satisfaga la condición de frontera de la EDP, mientras que la forma del funcional tiene que ver con la ecuación concreta a resolver. Calculado la derivada de Gateaux para u un minimizador, se tiene que para todo $v \in C_c^\infty(\Omega)$,

$$\begin{aligned} 0 = \frac{d}{dt}\mathcal{E}(u+tv)\mid_{t=0} &= \frac{d}{dt}\frac{1}{2}\int_\Omega (|\nabla u|^2 + 2t\nabla u\nabla v + t^2|\nabla v|^2)dx \mid_{t=0} \\ &= \int_\Omega \nabla u\cdot\nabla v dx, \end{aligned}$$

por lo que un minimizador u del funcional satisface

$$\int_\Omega \nabla u\nabla v dx = 0, \qquad \forall v \in C_c^\infty(\Omega).$$

Ahora, suponiendo que $u \in C^2$, podemos integrar por partes para obtener

$$\int_\Omega \Delta u v dx = 0, \qquad \forall v \in C_c^\infty(\Omega).$$

Esto implica que $-\Delta u = 0$ casi en todas partes de Ω.

Observación 1.1. *El problema del argumento anterior es que uno debe saber a priori la regularidad de u antes de integrar por partes. Más aún, es difícil pedir regularidad C^2, pero sí es un poco más sencillo asegurar regularidad $u \in H^1(\Omega)$, en cuyo caso el argumento anterior muestra que u es una solución débil.*

Definición 1.2. *Diremos que una solución débil del problema de Dirichlet (1) siempre que $u \in H^1(\Omega)$, $u\,|_{\partial\Omega} = g$ y*

$$\int_\Omega \nabla u \nabla v dx = 0, \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega),$$

donde $u\,|_{\partial\Omega}$ es la traza de u sobre $\partial\Omega$.

De manera más general, dado $f \in L^2(\Omega)$, diremos que u satisface $-\Delta u = f$ en Ω en el sentido débil si para $u \in H^1(\Omega)$ y

$$\int_\Omega \nabla u \nabla v dx = \int_\Omega fv, \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Definición 1.3. *Diremos que u es débilmente super-armónica (resp. sub-armónica) en Ω, o que satisface $-\Delta u \geq 0$ (resp. $-\Delta u \leq 0$) en Ω en el sentido débil si*

$$\int_\Omega \nabla u \nabla v dx \geq 0 \quad \left(resp. \quad \int_\Omega \nabla u \nabla v dx \leq 0 \right), \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega),\ v \geq 0.$$

Theorem 1.4 (Existencia y unicidad de soluciones débiles)**.** *Suponga que $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ es un dominio acotado con frontera Lipschitz y que*

{{1.14}}
$$\{w \in H^1(\Omega) : w\,|_{\partial\Omega} = g\} \neq \emptyset. \tag{2}$$

Entonces existe una única solución débil del problema de Dirichlet (1).

Proof: Separamos la demostración en dos pasos.

Paso 1: Existencia. Considere

$$\theta_0 = \inf\{\frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla w|^2 dx :\ w \in H^1(\Omega),\ w\,|_{\partial\Omega} = g\},$$

es decir, el ínfimo valor de $\mathcal{E}(w)$ dentro de todas las funciones admisibles. Considere una sucesión minimizante de $\mathcal{E}$, es decir, $\{u_k\}_{n\in\mathbb{N}} \subset H^1(\Omega)$ tal que $u_k\,|_{\partial\Omega} = g$ y que $\mathcal{E}(u_k) \to \theta$ cuando $k \to \infty$.

Paso 2: Unicidad. Si u es solución débil, entonces para todo $v \in H_0^1(\Omega)$,

$$\begin{aligned}\mathcal{E}(u+v) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u + \nabla v|^2 dx & \\ \geq \mathcal{E}(u) + 0 + \mathcal{E}(v) \geq \mathcal{E}(u),&\end{aligned}$$

con desigualdad estricta si $v \not\equiv 0$. Por tnato debe ser única. □

1.2. **Kernel de Poisson y solución fundamental.** La única solución débil del problema de Dirichlet en la bola es explícita: El sistema

$$\begin{cases} -\Delta u = 0, & B_1, \\ u = g & \partial B_1. \end{cases}$$

admite la solución explícita

$$u(x) = c_n \int_{\partial B_1} \frac{(1-|x|^2)g(\sigma)}{|x-\sigma|^n} d\sigma,$$

donde c_n es nuevamente una constante que depende del volumen de la bola. Via reescalamiento, lo anterior se puede adaptar para una bola $B_r(x_0) \subset \mathbb{R}^n$.

Por tanto, podemos deducir para una función armoónica $-\Delta u = 0$ en Ω con $B_r \subset \Omega$ que

$$u(x) = \frac{c_n}{r}\int_{\partial B_r} \frac{(r^2-|x|^2)u(y)}{|x-y|^n}dy.$$

Por tanto, una consecuencia de esta representación del kernel de Poisson,

Corolario 1.5. *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un abierto y $u \in H^1(\Omega)$ una función que satisface $-\Delta u = 0$ en el sentido débil en Ω. Entonces $u \in C^\infty$ dentro de Ω.*

Más aún, si u es acotada y $-\Delta u = 0$ en B_1 en el sentido débil, entonces tenemos la estimación

$$\|u\|_{C^k(B_{1/2})} \leq C_k \|u\|_{L^\infty(B_1)}, \qquad \forall k \in \mathbb{N},\ C_k = C(k,n) > 0. \tag{3}$$

Proof: Para cualquier bola $B_r(x) \subset \Omega$ tenemos la representación

$$u(x) = \frac{c_n}{r}\int_{\partial B_r} \frac{(r^2-|x|^2)u(y)}{|x-y|^n}dy.$$

Como $y \in \partial B_r$ y $x \in B_r(x)$, el denominador no se anula. Por tanto la función

$$K(x,y) = \frac{(r^2-|x|^2)u(y)}{|x-y|^n},$$

es C^∞. Asumiendo que u es acotada, se obtiene la cota. □

Por otro lado, la solución fundamental del Laplaciano en $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ viene dado por

$$\Phi(x) = \begin{cases} \frac{\kappa_n}{|x|^{n-2}}, & n \geq 3, \\ \kappa_2 \log \frac{1}{|x|}, & n = 2 \end{cases}$$

para una constante explícite κ_n que depende de la dimensión. Esta solución se dice fundamental porque $-\Delta\Phi = 0$ en $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, pero es singular en $x = 0$ pues

$$-\Delta\Phi = \delta_0, \quad \mathbb{R}^n.$$

En particular, $w = \Phi * f$ resuelve $-\Delta w = f$ en $\mathbb{R}^n$ para cualquier f con decaimiento apropiado en el infinito.

1.3. **Principio del máximo.**

Theorem 1.6 (Principio del máximo fuerte)**.** *Suponga $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ armónica en Ω.*

(1) *Entonces,*

$$\max_{\overline{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u.$$

(2) *Más aún, si Ω es conexo y existe $x_0 \in U$ tal que $u(x_0) = \max_{\overline{\Omega}} u$, entonces u es constante en Ω.*

Para el club, la consecuencia importante es

Theorem 1.7. *Si $\Delta u \geq 0$ en Ω con $u \in C(\overline{\Omega})$, entonces*

$$\max_{\overline{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u.$$

En particular, podemos deducir el principio de comparación siguiente.

Theorem 1.8. *Si $-\Delta u \leq -\Delta v$ en Ω y $u \leq v$ en $\partial\Omega$, entonces $u \leq v$ en todo Ω.*

El principio del máximo también se tiene para soluciones débiles.

Proposición 1.9. *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un abierto acotado. Asuma que $u \in H^1(\Omega)$ satisface el siguiente problema en el sentido débil,*

$$\begin{cases} -\Delta u \geq 0, & \Omega, \\ u \geq 0, & \partial\Omega. \end{cases}$$

Entonces $u \geq 0$ en Ω.

Proof: Note que $-\Delta u \geq 0$ en Ω si y solo si

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v dx \geq 0, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) : \ v \geq 0.$$

Considerando $u = u^+ - u^-$, notamos que $u^\pm \in H^1(\Omega)$ ya que $u \in H^1(\Omega)$. Elija $v = u^- \geq 0$ y note que $u^+u^- = 0$ y

$$0 \leq \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla u^- dx = -\int_\Omega |\nabla u^-|^2 dx.$$

Como $u^- \mid_{\partial\Omega} \equiv 0$, se tiene que $u^- \equiv 0$ en Ω. Por tanto $u \geq 0$. □

Una consecuencia importante del principio del máximo es,

Lema 1.10. *Sea u una solución débil de*

$$\begin{cases} -\Delta u = f, & \Omega, \\ u = g, & \partial\Omega. \end{cases}$$

Entonces,

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C(\|f\|_{L^\infty(\Omega)} + \|g\|_{L^\infty(\partial\Omega)}),$$

para una constante $C = C(\Omega) > 0$.

Proof: Considere la función

$$\tilde{u}(x) = \frac{u(x)}{\|f\|_{L^\infty(\Omega)} + \|g\|_{L^\infty(\partial\Omega)}}.$$

Queremos probar que $|\tilde{u}| \leq C$ en Ω, con $C = C(\Omega) > 0$. Note que $\tilde{u}$ es solución de

$$\begin{cases} -\Delta \tilde{u} = \tilde{f} & \Omega, \\ u = \tilde{g}, & \partial\Omega. \end{cases}$$

donde $|\tilde{g}|, |\tilde{f}| \leq 1$. Como Ω acotado, elija $R > 0$ suficientemente grande tal que $\Omega \subset B_R(0)$. Considere la función

$$w(x) = \frac{R^2 - x_1^2}{2} + 1,$$

que es solución de

$$\begin{cases} -\Delta w = 1, & \Omega, \\ w \geq 1, & \partial\Omega. \end{cases}$$

Luego, por el principio de comparación se deduce que $\tilde{u} \leq w$ en Ω, y note que $w \leq C$ para $C = C(R) > 0$. Esto nos dice que $\tilde{u} \leq C$ en Ω. El argumento es simétrico para $-\tilde{u}$, lo que nos permite mostrar que $|\tilde{u}| \leq C$ en Ω.

□

Por último, otro resultado importante es el lema de Hopf. Diremos que Ω satisface la condición de bola interior siempre que exista $\rho > 0$ tal que todo punto de $\partial\Omega$ se puede alcanzar por dentro por una bola de radio ρ, contenida en $\overline{\Omega}$. Es decir, para todo $x \in \partial\Omega$, existe $B_\rho(y) \subset \Omega$ tal que $x \in \partial B_\rho(y)$.

Lo anterior es técnico, pero válido para dominios C^2. También lo satisface todo dominio que sea complemento de un conjunto convexo.

Lema 1.11 (Lema de Hopf)**.** *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un dominio que satisface la condición de bola interior. Sea $u \in C(\overline{\Omega})$ una función armónica y positiva ne $\Omega \cap B_2$ con $u \geq 0$ sobre $\partial\Omega \cap B_2$.*

Entonces, $u \geq cd$ en $\Omega \cap B_1$ para algún $c > 0$ y $d(x) = \text{dist}(x, \Omega^c)$.

1.4. **Propiedad de la media y teorema de Liouville.** Si u es armónica en Ω, entonces

$$u(x) = \fint_{B_r(x)} u(y)dy, \quad \forall B_r(x) \subset \Omega.$$

Se dice que lo anterior es la propiedad de la media. De hecho, si $u \in C^(\Omega)$ satisface la propiedad de la media, entonces $-\Delta u = 0$ en Ω.

La gracia de la propiedad de la media es que podemos dar otra definición de función armónicas débiles en términos de funciones localmente integrables.

Definición 1.12. *Diremos que $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ es débilmente super-armoónica en Ω si el mapa*

$$r \mapsto \fint_{B_r(x)} u(y)dy, \tag{4}$$ {{1.20}}

es monótono decreciente para $r \in (0, \operatorname{dist}(x, \partial\Omega))$.

Introducimos dos lemas técnicos que serán útiles cuando se vean problemas de frontera libre.

Lema 1.13. *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ y $\{w_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones uniformemente acotadas $w_n\Omega \to \mathbb{R}$ que satisfacen (4) y que convergen puntualmente a $w : \Omega \to \mathbb{R}$. Entonces w satisface (4).*

Proof: Sea $w_\infty := w$ el límite y defina $\varphi_{x,n}(r) := \fint_{B_r(x)} w_n$. Observe que $\varphi_{x,n}(r)$ es decreciente en r para todo $n \in \mathbb{N}$. En particular, para $0 < r_1 < r_2 < R$ se tiene que $\varphi_{x,n}(r_1) \geq \varphi_{x,n}(r_2)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Tomando $n \to \infty$ y usando que $w_n(x) \to w(x)$, se obtiene por convergencia dominada que

$$\varphi_{x,\infty}(r_1) \geq \varphi_{x,\infty}(r_2),$$

es decir, $w_\infty = w$ satisface (4). □

Lema 1.14. *Asuma que w es acotada y satisface (4) en $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Entonces, módulo cambiar w en un conjunto de médida cero, w es semicontinua inferior.*

Proof: Dado que el promedio es monónoto decreciente. podemos definir $w_0(x) := \lim_{r\to\infty} \fint_{B_r(x)} w$, entonces $w_0(x) = w(x)$ si x es un punto de Lebesgue y por tanto $w_0 \equiv w$ casi en todas partes de Ω.

Sea $\overline{x} \in \Omega$ y $x_k \to \overline{x}$. Entonces por convergencia dominada y lema de Fatou,

$$\fint_{B_r(\overline{x})} w = \lim_{k\to\infty} \fint_{B_r(x_k)} w \leq \liminf_{k\to\infty} w_0(x_k),$$

para $0 < r < \frac{1}{2}\operatorname{dist}(\overline{x}, \partial\Omega)$. Tomando $r \to 0$ en el lado derecho, obtenemos

$$w_0(\overline{x}) \leq \liminf_{k\to\infty} w_0(x_k),$$

lo que prueba que es semi-continua inferior. □

Theorem 1.15 (Teorema de Liouville)**.** *Toda solución acotada de $-\Delta u = 0$ en $\mathbb{R}^n$ es constante.*

Proof: Si u es armónica y acotada en $\mathbb{R}^n$ ya sabemos que es suave. Por tanto, cada una de sus derivadas están bien definidas y son armónicas. Por la propiedad de la media y el teorema de la divergencia, se tiene para cualquier $x \in \mathbb{R}^n$ y $R > 0$,

$$|\partial_i u(x)| = \left| \frac{c_n}{R^n} \int_{B_R(x)} \partial_i u \right| = \left| \frac{c_n}{R^n} \int_{\partial B_R(x)} u(y) \frac{y_i}{|y|} dy \right| \leq \frac{C}{R^n} \int_{\partial B_R(x)} |u|.$$

Usando que $|u| \leq M$ en $\mathbb{R}^n$, se tiene que

$$|\partial_i u(x)| \leq \frac{c_n}{R^n} |\partial B_R(x)| M = \frac{c_n}{R^n} |\partial B_1(x)| R^{n-1} M = \frac{c_n M}{R} \to 0, \quad R \to \infty.$$

□

De hecho, hay una mejor versión para funciones de crecimiento polinomial.

Proposición 1.16 (Teorema de Liouville con crecimiento)**.** *Suponga que u es solución de $-\Delta u = 0$ en $\mathbb{R}^n$ que satisface $|u(x)| \leq C(1+|x|^\gamma)$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$, con $\gamma > 0$. Entonces u es polinomial de grado a lo más $\lfloor \gamma \rfloor$.*

Proof: Defina $u_R(x) := u(Rx)$, luego $-\Delta u_R = 0$ en $\mathbb{R}^n$. Como es acotada, obtenemos que

$$\begin{aligned} R^k \|D^k u\|_{L^\infty(B_{R/2})} &\leq \|D^k u_R\|_{L^\infty(B_{1/2})} \\ &\leq C_k \|u_R\|_{L^\infty(B_1)} = C_k \|u\|_{L^\infty(B_R)} \leq C_k R^\gamma. \end{aligned}$$

En particular, si $k = \lfloor \gamma \rfloor + 1$, se tiene que

$$\|D^k u\|_{L^\infty(B_{R/2})} \leq C_k R^{\gamma - k} \to 0, \qquad R \to \infty.$$

Se sigue que $D^k u \equiv -$ en $\mathbb{R}^n$ y por tanto u es polinomial de grado $k - 1 = \lfloor \gamma \rfloor$. □

1.5. **Existencia de soluciones: principio de comparación.** La idea del método es probar la existencia de una solución viscosa $u \in C(\overline{\Omega})$. Para la ecuación de Laplace, esta noción coincide con las soluciones débiles. En ambos casos se puede probar que son $C^\infty(\Omega)$.

Definición 1.17. *Una función $u \in C(\overline{\Omega})$ se dice sub-armónica en el sentido viscoso si para toda función $v \in C^2$ tal que v toca a u por arriba en $x \in \Omega$, entonces se tiene $-\Delta v(x) \leq 0$.*

Observación 1.18. *Que v toque por arriba a u en $x \in \Omega$ quiere decir que $v \geq u$ en Ω y que $u(x) = v(x)$.*

Observación 1.19. *Diremos que $u \in C(\Omega)$ es armónica si es sub y super-armónica en el sentido viscoso. (Recuerde que en el sentido clásico, armónico exige $u \in C^2(\Omega)$). De la misma forma, el mínimo de dos funciones super-armónicas es super-armónica.*

Proposición 1.20. *El máximo de dos funciones sub-armónicas es sub-armónica. Es deicr, si $u_1, u_2 \in C(\Omega)$ es sub-armónica, entonces $v = \max\{u_1, u_2\}$ es sub-armónica también.*

Proposición 1.21. *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un dominio acotado y asuma que $u \in C(\overline{\Omega})$ satisface,*

$$\begin{cases} -\Delta u \geq 0, & \Omega, \\ u \geq 0, & \partial\Omega. \end{cases}$$

en el sentido viscoso. Entonces $u \geq 0$ en Ω.

Proof: Luego de reescalar, basta usar $\Omega \subset B_1$.

Suponga que u tiene un mínimo negativo en Ω. Como $u \geq 0$ en $\partial\Omega$, se tiene que $\min_{\overline{\Omega}} u = -\delta$ con $\delta > 0$ y el mínimo se alcanza en Ω.

Considere $\varepsilon \in (0, \delta)$ y $v(x) := -\kappa + \varepsilon(|x|^2 - 1)$ con $\kappa > 0$ para κ libre. Note que $u - v > 0$ en $\partial\Omega$. por lo que podemos elegir κ tal que $\min_{\overline{\Omega}}(u - v) = 0$. Por tanto existe $x_0 \in \Omega$ tal que $u(x_0) - v(x_0) = \min_{\overline{\Omega}}(u - v) = 0$. Con tal elección de κ, v toca a u por debajo en $x_0 \in \Omega$, lo que en términos de solución viscosa dice que

$$-\Delta v(x_0) \geq 0,$$

pero $\Delta v = 2n\varepsilon > 0$, lo que es una contradicción. □

Gracias a la maquinaria anterior, podemos probar la existencia de una solución viscosa al problema de Dirichlet de la siguiente manera. Sea

$$S_g := \{v \in C(\overline{\Omega}) : \ v \text{ es sub-armónica y } v \leq g \text{ en } \partial\Omega\},$$

y defina el supremo puntual

$$u(x) = \sup_{v \in S_g} v(x).$$

Entonces se puede probar que, si Ω es regular y g continua, entonces $u \in C(\overline{\Omega})$ y $\Delta u = 0$ en Ω con $u = g$ en $\partial\Omega$. Este método es clásico y se conoce como el método de Perron.

2. Desigualdad de Harnack

La gracia de este resultado es que nos entrega un principio del máximo cuantitativo. Cuando digamos $u \in H^1$ armónica, nos referimos en el sentido débil.

Theorem 2.1 (Desigualdad de Harnack)**.** *Asuma que $u \in H^1(B_1)$ es una función armónica no negativa en B_1. Entocnes el ínfimo y el supremo de u son comparables en $B_{1/2}$. Es decir,*

$$\begin{cases} -\Delta u = 0, & B_1, \\ u \geq 0 & B_1. \end{cases},$$

entonces

$$\sup_{B_{1/2}} u \leq C \inf_{B_{1/2}} u,$$

para alguna constante $C = C(n) > 0$.

Proof: Usamos la representación por el kernel de Poisson

$$u(x) = c_n \int_{\partial B_1} \frac{(1 - |x|^2)u(z)}{|x - z|^n} dz.$$

Observe que para $x \in B_{1/2}$ y $z \in \partial B_1$, se tiene

$$\frac{1}{2^n} \leq |x - z|^n \leq \left(\frac{3}{2}\right)^n, \quad \text{y} \quad \frac{3}{4} \leq 1 - |x|^2 \leq 1.$$

Como $u \geq 0$ en B_1, obtenemos para todo $x \in B_{1/2}$ que

$$C^{-1} \int_{\partial B_1} u(z) dz \leq u(x) \leq C \int_{\partial B_1} u(z) dz,$$

donde $C = C(n) > 0$. En particular, para $x_1, x_2 \in B_{1/2}$ se tiene que $u(x_1) \leq C^2 u(x_2)$. Tomando ínifmo en x_2 y supremo en x_1 se concluye. □

Observación 2.2. *Por principio del máximo cuantitativo nos referimos a lo siguiente. Suponga que $u \geq 0$ en B_1, entonces no sólo sabemos que $u > 0$ en $B_{1/2}$ por el principio del máximo fuerte, si no que Harnack nos dice que $u \geq C^{-1} \sup_{B_{1/2}} u$ en $B_{1/2}$ para $C = C(n) > 0$. Es decir, podemos obtener todas los valores de la cota inferior.*

Observación 2.3. *El radio de la segunda bola no es tan importante. Si consideramos B_ρ con $\rho < 1$, la constante C de la desigualdad queda dependiendo de ρ además de n. Además, podemos iterar el argumento para obtener que si $-\Delta u = 0$ y $u \geq 0$ en B_1, entonces*

$$\sup_{B_\rho} u \leq \frac{C}{(1 - \rho)^n} \inf_{B_\rho} u,$$

donde $C = C(n, \rho) > 0$.

Por Harnack, ahora es de interés estudiar la oscilación de una función armónica, que se define en un dominio Ω como

$$\operatorname{osc}_\Omega u := \sup_\Omega u - \inf_\Omega u.$$

Corolario 2.4 (Decaimiento oscilatorio)**.** *Sea $u \in H^1(B_1)$ una función armónica en B_1. Entonces*

$$\operatorname{osc}_{B_{1/2}} u \leq (1-\theta) \operatorname{osc}_{B_1} u,$$

para algún $\theta > 0$ que depende solo de n.

Proof: Sea $w := u(x) - \inf_{B_1} u$, que claramente cumple $w \geq 1$ en B_1 y $\operatorname{osc}_{B_{1/2}} = \operatorname{osc}_{B_{1/2}} u$. Como $\Delta w = 0$ en B_1, por la desigualdad de Harnack,

$$\sup_{B_{1/2}} w \leq C \inf_{B_{1/2}} w,$$

lo que nos dice que

$$\operatorname{osc}_{B_{1/2}} u = \operatorname{osc}_{B_{1/2}} w = \sup_{B_{1/2}} w - \inf_{B_{1/2}} w \leq \left(1 - \frac{1}{C}\right) \sup_{B_{1/2}} w \leq \left(1 - \frac{1}{C}\right) \sup_{B_1} w.$$

Notando que $\sup_{B_1} w = \operatorname{osc}_{B\,1} u$, se concluye. □

Observación 2.5. *Mostramos que la desigualdad de Harnack siempre implica el decaimiento de la oscilación. En general, tenemos que*

$$\begin{pmatrix} \textit{Desigualdad} \\ \textit{de Harnack} \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} \textit{Decaimiento} \\ \textit{de Oscilación} \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} \textit{Regularidad} \\ \textit{Hölder} \end{pmatrix}$$

La desigualdad de Harnack y el decaimiento de la oscilación son invariantes bajo reescalamiento, es decir,

Corolario 2.6 (Versiones reescaladas)**.** *Sea $u \in H^1(B_r)$ tal que $-\Delta u = 0$ en B_r. Entonces*

(1) *Desigualdad de Harnack: Si $u \geq 0$ en B_r, entonces*

$$\sup_{B_{r/2}} u \leq C \inf_{B_{r/2}} u,$$

para algún C que depende solo de n.

(2) *Decaimiento de oscilación: Se tiene*

$$\operatorname{osc} B_{r/2} u \leq (1-\theta) \operatorname{osc}_{B_r} u,$$

para $\theta > 0$ chico que depende solo de n.

Proof: Defina $\tilde{u}(x) = u(rx)$, que satisface $\Delta \tilde{u} = 0$ en B_1, por tanto la desigualdad de Harnack dice

$$\sup_{B_{r/2}} u = \sup_{B_{1/2}} \tilde{u} \leq C \inf_{B_{1/2}} \tilde{u} = C \inf_{B_{r/2}} u.$$

De la misma forma,

$$\operatorname{osc}_{B_{r/2}} u = \operatorname{osc}_{B_{1/2}} \tilde{u} \leq (1-\theta) \operatorname{osc}_{B_1} \tilde{u} = (1-\theta) \operatorname{osc}_{B_r} u,$$

por el decaimiento de oscilación. □

Una consecuencia cuantitativa del decaimiento de la oscilación probado anteriormente es la regularidad Hölder de las soluciones.

Corolario 2.7 (Regularidad Hölder)**.** *Sea $u \in H^1(B_1) \cap L^\infty(B_1)$ tal que $-\Delta u = 0$ en B_1. Entonces*

$$\|u\|_{C^{0,\alpha}(B_{1/2})} \leq C \|u\|_{L^\infty(B_1)},$$

para alguna constante $\alpha > 0$ y C que dependen solo de n.

Proof: Escriba $\tilde{u} := (2\|u\|_{L^\infty(B_1)})^{-1} u$, entonces $\tilde{u} \in H^1(B_1) \cap L^\infty(B_1)$ $-\Delta \tilde{u} = 0$ en B_1 y $\|\tilde{u}\|_{L^\infty(B_1)} \leq 1/2$. Ahora basta probar $\|\tilde{u}\|_{C^{0,\alpha}(B_{1/2})} \leq C$.

Suponga que $\|u\|_{L^\infty(B_1)} \leq 1/2$, queremos probar que

$$|u(x) - u(y)| \leq C|x-y|^\alpha, \quad \forall x, y \in B_{1/2},$$

para α suficientemente chico. Sin pérdida de generalidad, asuma que $y = 0$.Sea $x \in B_{1/2}$ y sea $k \in \mathbb{N}$ tal que $x \in B_{2^{-k}} \setminus B_{2^{-k-1}}$. Entonces

$$|u(x) - u(0)| \leq \operatorname{osc}_{B^{-2k}} u \leq (1-\theta)^k \operatorname{osc}_{B_1} u \leq (1-\theta)^k = 2^{-\alpha k},$$

donde $\alpha = -\log_2(1-\theta)$. En otras palabras, usamos el decaimiento de la oscilación reescalada k veces. Como $2^{-k} \leq 2|x|$, se tiene

$$|u(x) - u(0)| \leq 2^{\alpha}|x|^{\alpha} \leq C|x|^{\alpha},$$

como queríamos probar.

□

Otra consecuencia importante de Harnack es el teorema de Liouville para funciones armónicas no negativas.

Corolario 2.8. *Sea u una función armónica no negativa. Es decir, $u \geq 0$ y $-\Delta u = 0$ en $\mathbb{R}^n$. Entonces u es constante.*

Proof: Sea $v = u - \inf_{\mathbb{R}^n} u$, donde el ínfimo se alcanza gracias a que $u \geq 0$. Entonces por Harnack se tiene para cualquier $R > 0$ que

$$\sup_{B_R} v \leq C \inf_{B_R} v = C\left(\inf_{B_R} u - \inf_{\mathbb{R}^n} u\right) \to 0,$$

cuando $R \to \infty$. Es decir, $\sup_{\mathbb{R}^n} u = \inf_{\mathbb{R}^n} u$, por lo que u es constante en $\mathbb{R}^n$. □

2.1. **Desigualdad de Harnack con lado derecho.**

Theorem 2.9. *Sea $f \in L^{\infty}(B_1)$ y $u \in H^1(B_1)$. Entonces,*

$$\begin{cases} -\Delta u = f, & B_1, \\ u \geq 0 & B_1. \end{cases}$$

implica que

$$\sup_{B_{1/2}} u \leq C\left(\inf_{B_{1/2}} u + \|f\|_{L^{\infty}(B_1)}\right),$$

para algún C dependiendo solo de n.

Proof: Queremos descomponer la solución $u = v + w$ donde v y w son soluciones de

$$\begin{cases} -\Delta v = 0, & B_1, \\ v = u, & \partial\Omega. \end{cases}, \qquad \begin{cases} -\Delta w = f, & B_1, \\ w = 0, & \partial\Omega. \end{cases}.$$

Por tanto, se tiene del Teorema y del Lema que

$$\sup_{B_{1/2}} v \leq C \inf_{B_{1/2}} v, \qquad \sup_{B_1} w \leq C\|f\|_{L^{\infty}(B_1)}.$$

Se sigue que

$$\begin{aligned} \sup_{B_{1/2}} u &\leq \sup_{B_{1/2}} v + C\|f\|_{L^{\infty}(B_1)} \\ &\leq C \inf_{B_{1/2}} v + C\|f\|_{L^{\infty}(B_1)} \\ &\leq C\left(\inf_{B_{1/2}} u + \|f\|_{L^{\infty}(B_1)}\right), \end{aligned}$$

donde notamos que usamos $v \leq u + C\|f\|_{L^{\infty}(B_1)}$. Esto prueba el resultado. □

Al igual que en el caso homogéneo, podemos obtener un decaimiento de la oscilación.

{Cor2.10}

Corolario 2.10. *Sea $f \in L^\infty(B_1)$ y $u \in H^1(B_1)$. Si $-\Delta u = f$ en B_1 y $f \in L^\infty(B_1)$, entonces*

$$\operatorname{osc}_{B_{1/2}} u \leq (1-\theta)\operatorname{osc}_{B_1} u + 2\|f\|_{L^\infty(B_1)},$$

para algún $\theta > 0$ dependiendo solo de n.

Observación 2.11. *El problema es que cuando tenemos lado derecho, la ecuación $-\Delta u = f$ y la desigualdad de Harnack ya no son invariantes bajo reescalamiento en x. Esto se sigue de que si usamos $\tilde{u}(x) = u(rx)$, entonces $\Delta\tilde{u}(x) = r^2 f(rx)$ en B_1, por lo que*

$$\sup_{B_{1/2}} \tilde{u} \leq C\left(\inf_{B_{1/2}} \tilde{u} + 2r^2\|f\|_{L^\infty(B_r)}\right),$$

y por tanto,

$$\sup_{B_{r/2}} \tilde{u} \leq C\left(\inf_{B_{1/2}} \tilde{u} + 2r^2\|f\|_{L^\infty(B_r)}\right),$$

con $C = C(n) > 0$, por lo que repitiendo iterativamente el proceso, obtenemos un radio cada vez más chico en el lado izquierdo y por tanto $r^2 f(rx)$ se hace cada vez más chico.

A pesar de la observación anterior, con lado derecho aún tenemos regularidad Hölder.

Corolario 2.12 (Regularidad Hölder)**.** *Sea $f \in L^\infty(B_1)$ y $u \in H^1(B_1) \cap L^\infty(B_1)$. Si $-\Delta u = f$ en B_1, entonces*

$$\|u\|_{C^{0,\alpha}(B_{1/2})} \leq C(\|u\|_{L^\infty(B_1)} + \|f\|_{L^\infty(B_1)}),$$

para alguna $\alpha > 0$ y $C = C(n) > 0$.

Proof: Denote $\tilde{u} = (2\|u\|_{L^\infty(B_1)} + \|f\|_{L^\infty(B_1)})^{-1}u$, entonces $\tilde{u} \in H^1(B_1) \cap L^\infty(B_1)$ satisface $-\tilde{u} = \tilde{f}$ en B_1 con $\|\tilde{u}\|_{L^\infty(B_1)}, \|\tilde{f}\|_{L^\infty(B_1)} \leq 1/2$. Basta probar $\|\tilde{u}\|_{C^{0,\alpha}(B_{1/2})} \leq C$.

Luego de dividir por constantes, podemos asumir que $\|u\|_{L^\infty(B_1)}, \|f\|_{L^\infty(B_1)} \leq 1/2$. Por el Corolario, se tiene que

$$|u(x_0) - u(0)| \leq C|x_0|^\alpha, \quad \forall x_0 \in B_{1/2},$$

donde $C = C(n) > 0$. Por tanto primero veremos que basta probar en el caso no homogéneo que

{{Eq2.4}}

$$\operatorname{osc}_{B^{-2k}} u \leq C2^{-\alpha k}, \quad \forall k \geq k_0, \tag{5}$$

para algún $\alpha, C > 0$ y $k_0 \in \mathbb{N}$, las tres dependiendo de n. Sea $k \in \mathbb{N}$ tal que $x \in B_{2^{-k}} \setminus B_{2^{-k-1}}$, si $k < k_0$, entonces $|x| \geq 2^{-k_0-1}$ y

$$|u(x) - u(0)| \leq \operatorname{osc}_{B_1} u \leq 1 \leq 2^{\alpha(k_0+1)}|x|^\alpha.$$

Por otro lado, si $k \geq k_0$, por (5),

$$|u(x) - u(0)| \leq \operatorname{osc}_{B^{-2k}} u \leq C2^{-\alpha k} \leq C2^\alpha|x|^\alpha,$$

donde en la última desigualdad usamos que $|x| \geq 2^{-k-1}$. Esto prueba que basta probar (5).

Sea $k \in \mathbb{N}$ con $k \geq k_0$ donde queremos escoger apropiadamente k_0. Defina

$$\tilde{u}(x) = u(rx), \quad r = 2^{-k+1}.$$

Entonces $\tilde{u}$ satisface $-\Delta\tilde{u} = -r^2 f(rx)$ en B_1. El Corolario (2.10) implica

$$\operatorname{osc}_{B_{1/2}} \tilde{u} \leq (1-\theta)\operatorname{osc}_{B_1} \tilde{u} + 2r^2\|f\|_{L^\infty(B_r)}.$$

Dado que $\operatorname{osc}_{B_1} \tilde{u} = \operatorname{osc}_{B_{2^{-k+1}}} u$ and $\|f\|_{L^\infty(B_r)} \leq 1/2$, se tiene

$$\operatorname{osc}_{B_{2^{-k}}} u \leq (1-\theta)\operatorname{osc}_{B_{2^{-k+1}}} u + 4^{-k+2}.$$

Leugo, tomando k_0 suficientemente grande para que $4^{-k_0+1} \leq \theta/2$. Entonces

$$\operatorname{osc}_{B^{-2k}} u \leq (1-\theta)\operatorname{osc}_{B_{2^{-k+1}}} u + \frac{\theta}{2}4^{k_0-k}.$$

por inducción, se termina probando que

$$\begin{aligned}\operatorname{osc}_{B^{-2k}} u &\leq (1-\theta)2^{\alpha(k_0-k)} + \frac{\theta}{2}4^{k_0-k} \leq (1-\theta)2^{\alpha(k_0-k)} + \frac{\theta}{2}2^{\alpha(k_0-k)} \\ &= \left(1-\frac{\theta}{2}\right)2^{\alpha(k_0-k)} = 2^{\alpha(k_0-k-1)},\end{aligned}$$

donde $1-\theta/2 = 2^{-\alpha}$. Por tanto, (5) se tiene con $C = 2^{\alpha k_0}$.

□