EDPs en Geometría Riemanniana

Felipe Labra

December 16, 2025

Contents

1 Solución de la ecuación de Laplace en algunos dominios.

1.1 Separación de variables

Considere la siguiente ecuación de Laplace en un dominio rectangular,

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad (x,y) \in [0,L] \times [0,M], \\ u(0,y) = u(L,y) = 0, \quad y \in [0,M], \\ u(x,0) = 0, \; u(x,M) = \sin(\frac{7\pi}{L}x). \end{cases}$$

El método de separación de variables propone una solución del tipo no nula

$$u(x,y) = X(x)Y(y) \neq 0.$$

Reemplazando en la ecuación obtenemos la siguiente igualdad para $\lambda > 0$.

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{Y''(y)}{Y(y)} = \lambda.$$

De donde desprendemos dos EDOS:

$$\begin{cases} -X'' + \lambda X = 0, \\ X(0) = X(L) = 0. \end{cases}, \qquad \begin{cases} Y'' - \lambda Y = 0. \end{cases}$$

El primer problema se conoce como el problema de Sturm-Liouville. El polinomio característico viene dado por $m^2 + \lambda = 0$. Por tanto obtenemos soluciones

$$X(x) = A\sin(\sqrt{\lambda}x) + B\cos(\sqrt{\lambda}x), \quad A, B \in \mathbb{R}^*.$$

Imponiendo las condiciones de frontera se sigue que $B = 0$ y que

$$X(L) = 0 = B\sin(\sqrt{\lambda}L), \quad B \neq 0.$$

Por tanto, encontramos soluciones que satisfacen

$$\sqrt{\lambda_k}L = k\pi, \quad k \in \mathbb{N},$$

de donde $\sqrt{\lambda_k} = \frac{k\pi}{L}$. Estos son los valores propios asociados al problema de Sturm-Liouville, mientras que

$$X_k(x) = A_n \sin(\sqrt{\lambda_k}x),$$

son las funciones propias. Podemos abusar de notación y tomar solamente $X_k(x) = \sin(\sqrt{\lambda_k}x)$, como veremos más adelante.

Con esta solución, podemos resolver la otra EDO y obtener las soluciones

$$Y_k(y) = C_n e^{\sqrt{\lambda_k}x} + D_n e^{-\sqrt{\lambda_k}x} = C_k \sinh(\sqrt{\lambda_k}x) + D_k \cosh(\sqrt{\lambda_k}x),$$

donde la última igualdad hace que el sistema sea más fácil de trabajar. Con esto, la solución del sistema para $k \in \mathbb{N}$ viene dada por

$$u_k(x,y) = X_k(x)Y_k(y) = A_k \sin(\sqrt{\lambda_k}x)\left[C_k \sinh(\sqrt{\lambda_k}x) + D_k \cosh(\sqrt{\lambda_k}x)\right],$$

donde podemos absorver A_k por C_k y D_k, explicando por qué podemos tomar $A_k \equiv 1$. El sistema que estamos estudiando es lineal, por lo que por el principio de superposición se tiene que

$$u(x,y) = \sum_{k\in\mathbb{N}} \sin(\sqrt{\lambda_k}x)\left[C_k \sinh(\sqrt{\lambda_k}y) + D_k \cosh(\sqrt{\lambda_k}y)\right].$$

Ahora queremos imponer las condiciones de frontera con respecto a y. Note que

$$u(x,0) = 0 = \sum_{k\in\mathbb{N}} \sin(\sqrt{\lambda_k}x)\cdot D_k,$$

por tanto, $D_k = 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$, lo que nos deja con la solución

$$u(x,y) = \sum_{k\in\mathbb{N}} C_k \sin(\sqrt{\lambda_k}x)\sinh(\sqrt{\lambda_k}y),$$

usando la segunda condición de frontera:

$$u(x,M) = \sum_{n\in\mathbb{N}} C_k \sin(\sqrt{\lambda_k}x)\sinh(\sqrt{\lambda_k}M) = \sin\left(\frac{7\pi x}{L}\right).$$

Esto nos dice que para $k = 7$, $A_k = \frac{1}{\sinh(\sqrt{\lambda_7}M)}$ y $A_k = 0$ para todo $k \in \mathbb{N}\setminus\{7\}$. Por tanto, la solución final es

$$u(x,y) = \frac{\sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right)\sinh\left(\frac{k\pi}{L}y\right)}{\sinh\left(\frac{7\pi M}{L}\right)}.$$

En esencia, el problema se reduce a lo siguiente:

1. Proponer la solución por separación de variables no nula.
2. Resolver el problema de Sturm-Liouville, encontrando valores y funciones propias.
3. Encontrar solución por principio de superposición.
4. Aplicar las condiciones de frontera con respecto al segundo problema, para fijar las constantes.

1.2 Ecuación de Laplace en el disco

Ahora veremos qué pasa si intentamos resolver una ecuación de Laplace en el disco. Recordemos que en coordenadas polares el Laplaciano se puede escribir como

$$\Delta_{\mathbb{S}^1} u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0.$$

Considere entonces el siguiente problema de valor inicial

$$\begin{cases} r^2u_{rr} + ru_r + u_{\theta\theta} = 0, & 1 < r < 2,\ 0 < \theta < \pi, \\ u_\theta(r,0) = u_\theta(r,\pi) = 0, & 1 < r < 2, \\ u(1,\theta) = 4, & 0 < \theta < \pi, \\ u_r(2,\theta) = 1 + 5\cos(\theta), & 0 < \theta < \pi. \end{cases}$$

Buscamos una solución no nula de la forma

$$u(r,\theta) = R(r) \cdot \Theta(\theta).$$

Reemplazando en la EDP anterior, obtenemos

$$\frac{r^2R''}{R} + \frac{rR'}{R} = -\frac{\Theta''}{\Theta} = -\lambda,$$

donde $\lambda > 0$. Al igual que en el problema anterior, si $\lambda \leq 0$ obtenemos soluciones nulas. De acá obtenemos dos sistemas

$$\begin{cases} \Theta'' - \lambda\Theta = 0, \\ \Theta'(0) = \Theta'(\pi) = 0. \end{cases} , \qquad \begin{cases} r^2R'' + rR' + \lambda R = 0. \end{cases}$$

El polinomio característico nos dice que $\Theta(\theta) = A\sin(\sqrt{-\lambda}\theta) + B\cos(\sqrt{-\lambda}\theta)$. Con las condiciones de frontera, obtenemos que

$$\lambda_n = -n^2, \qquad \Theta(\theta) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n\cos(n\theta)$$

La otra ecuación es del tipo Cauchy-Euler. Reemplazamos por $R(r) = r^\alpha$, de modo que obtenemos

$$r^2\alpha(\alpha-1)r^{\alpha-2} + r\alpha r^{\alpha-1} + \lambda r^\alpha = 0,$$

de donde se deduce que $\alpha(\alpha-1) + \alpha + \lambda = 0$. Por tanto, $\alpha = \pm\sqrt{-\lambda}$. Para $\lambda = 0$, obtenemos que

$$R(r) = c_1 + c_2\ln(r).$$

Para $\lambda_n = -n^2$, se tiene que

$$R(r) = c_1r^n + c_2r^{-n}.$$

Usando superposición,

$$u(r,\theta) = a_0 + b_0\ln(r) + \sum_{n=1}^{\infty}\cos(n\theta)(a_nr^n + b^nr^{-n}).$$

Por las condiciones de frontera, tenemos que como $u(1,\theta) = 4$, $a_0 = 4$ y $a_n + b_n = 0$. Por otro lado, $u_r(2,\theta) = 1 + 5\cos(\theta)$ nos dice que $b + 0/2 = 1$, $1 \cdot a_1 2^{1-1} - 1 \cdot b_1 2^{-1-1} = 5$ y $na_n2^{n-1} - nb_n2^{-n} = 0$ para todo $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$. Con estas condiciones, encontramos que

$$a_0 = 4, \quad b_0 = 2, \quad a_1 = 4, \quad b_1 = -4, \quad a_n = b_n = 0,\ \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}.$$

Por tanto, la solución viene dada por

$$u(r, \theta) = 4 + 2\ln(r) + \cos(\theta)(4r - 4r^{-1}).$$

Observación 1.1. *Este método también se puede usar para resolver problemas de evolución como la ecaución de ondas y la de calor.*

1.3 Transformada de Fourier

En $\mathbb{R}^n$ podemos definir la transformada de Fourier $\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$ como

$$\mathcal{F}(u)(\xi) = \hat{u}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\cdot\xi} u(x) dx.$$

Esta aplicación tiene una inversa, y de hecho, tenemos un isomorfismo isométrico. La fórmula de inversión de Fourier dice que $\mathcal{F}^{-1} : L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$ dada por

$$\mathcal{F}^{-1}(u(\xi)) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\cdot\xi} \hat{u}(\xi) d\xi.$$

Tenemos las siguientes propiedades.

Proposición 1.2. *Dadas $\phi, \psi \in L^2(\Omega)$, se tiene usando que $D_j = \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_j}$,*

1. $(\phi * \psi)\hat{} = \hat{\phi} \cdot \hat{\psi}$.
2. $(\phi\psi)\hat{} = \hat{\phi} * \hat{\psi}$.
3. $\phi(x) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\cdot\xi} \hat{\phi}(\xi) d\xi$.
4. $(D^\alpha \phi)\hat{}(\xi) = \xi^\alpha \hat{\phi}(\xi)$.
5. $(x^\alpha \phi)\hat{}(\xi) = D^\alpha \hat{\phi}(\xi)$.

En particular al intentar resolver el problema de Poisson en $\mathbb{R}^n$:

$$-\Delta u = f(x),$$

aplicamos transformada de Fourier para obtener

$$|\xi|^2 \hat{u}(\xi) = \hat{f}(\xi),$$

de donde deducimos que

$$\hat{u}(\xi) = \frac{\hat{f}(\xi)}{|\xi|^2},$$

bajo suficiente regularidad. Por tanto, la solución analítica bajo este supuesto es que

$$u(x) = \mathcal{F}^{-1}\left(\frac{\hat{f}(\xi)}{|\xi|^2}\right).$$

Ejemplo 1.3 (Resolviendo la ecuación de Calor). *Al intentar resolver el problema dado por*

$$\partial_t u - \Delta u = 0, \quad x \in \mathbb{R}^n,\ t \geq 0.$$

Podemos usar la transformada de Fourier en espacio. Con esto, obtenemos

$$\partial_t \hat{u} + |\xi|^2 \hat{u} = 0.$$

Esto es una EDO en tiempo, cuya solución viene dada por

$$\hat{u}(\xi, t) = A e^{-|\xi|^2 \cdot t}.$$

Para encontrar u, usamos inversión de Fourier, de donde obtenemos

$$u(x,t) = A\mathcal{F}^{-1}\left(e^{-|\xi|^2 \cdot t}\right) = \frac{e^{-|x|^2/4t}}{\sqrt{4\pi t}^n}.$$

Esta última expresión es importante, en la literatura se conoce como el kernel de calor.

1.4 Qué esperar de la charla

El primer punto es que, en la mayoria de los casos, el dominio no nos acompaña geométricamente. Es decir, no podemos contar fácilmente con un dominio que permita describir la solución de manera explícita, por lo que nos gustaría desarrollar herramientas para la existencia y, ojalá, unicidad de soluciones en esta clase de problemas.

El método de separación de variables se extiende a ecuaciones de ondas $\partial_t^2 - \Delta = 0$ y ecuaciones de calor $\partial_t - \Delta = 0$. En ambos casos, la propuesta de solución viene dada por

$$u(t,x) = T(t)X(x),$$

de modo que obtenemos el problema de Sturm-Liouville a $X(x)$ y el problema temporal asociado a $T(t)$. Esto permite que podamos escribir de manera abstracta lo que se conoce como el problema de Cauchy abstracto.

Otro punto importante es sobre la regularidad de las soluciones: Dado que Δ es un operador diferencial de orden 2, uno espera soluciones clásicas de clase $C^2(\Omega)$, donde Ω es el dominio en estudio. Varias de las EDP que se estudian no admiten soluciones en este espacio, por lo que debemos debilitarlo. Para ello debemos introducir los espacios de Sobolev.

Finalmente, queremos extender la teoría anterior a variedades. La buena noticia es que solo debemos pedir particiones de la unidad para que todo funcione. Si el tiempo alcanza, veremos además algunas aplicaciones.

2 Algunos espacios funcionales

Aquí las principales referencias son [1, 2].

Durante esta sección consideraremos $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un dominio abierto y acotado. Sea además $1 \leq p \leq \infty$.

Definición 2.1. *Definimos el espacio de Sobolev de orden* 1 *en* $L^p(\Omega)$ *como*

$$W^{1,p}(\Omega) = \left\{ u \in L^p(\Omega) : \exists g_1, \ldots, g_N \in L^p(\Omega) : \int_\Omega u \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = -\int_\Omega g_i \cdot \varphi, \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega) \right\}.$$

Estos espacios tienen buenas propiedades. $W^{1,p}(\Omega)$ es un espacio de Banach, y, en particular, $H^1(\Omega) := W^{1,2}(\Omega)$ es un espacio de Hilbert. El producto interno asociado viene dado por

$$\langle u, v \rangle_{H^1(\Omega)} = \langle u, v \rangle_{L^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^n \left\langle \frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial v}{\partial x_i} \right\rangle_{L^2(\Omega)}.$$

Más en general, tenemos

Definición 2.2. *Para* $m \geq 2$*, definimos*

$$W^{m,p}(\Omega) := \left\{ u \in L^p(\Omega) : \forall \alpha : |\alpha| \leq m, \exists g_\alpha \in L^p(\Omega) : \int_\Omega u D^\alpha \varphi = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega g_\alpha \varphi, \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega) \right\}.$$

Aquí, usamos la notación de multi-índice $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$. Además,

$$D^\alpha \varphi = \frac{\partial^{|\alpha|} \varphi}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}}.$$

La norma asociada al espacio $W^{k,p}(\Omega)$ es

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_p,$$

con la que se vuelve un espacio de Banach. De la misma forma, en $H^m(\Omega) := W^{m,2}(\Omega)$ tenemos

$$\langle u, v \rangle_{H^m(\Omega)} := \sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \langle D^\alpha u, D^\alpha v \rangle_{L^2(\Omega)},$$

donde $H^m(\Omega)$ se vuelve un espacio de Hilbert.

También podemos definir los espacios de Sobolev con respecto a la transformada de Fourier cuando trabajamos en $L^2(\Omega)$.

Definición 2.3. *Definimos los espacios de Sobolev* $H^s(\Omega)$ *como*

$$H^s(\Omega) := \{u \in L^2(\Omega) : \int_\Omega (1 + |\xi|^2)^s |u(x)|^2 \, dx < \infty\}.$$

La gracia de la definición anterior es que, además, permite extender los espacios de Sobolev a derivadas fraccionarias.

En esencia, hasta el momento solo podemos llevar registro del orden de las derivadas, pero nada de cómo llevar registro de las condiciones de frontera. Para ello necesitamos una noción más abstracta de *traza*, que responde a la pregunta de cómo lograr evaluar funciones en la frontera.

Definición 2.4. *Definimos los espacios $H_0^k(\Omega)$ como*

$$H_0^k(\Omega) := \{u \in H^k(\Omega) : D^\alpha u \in L^2(\Omega),\ \forall |\alpha| \leq k, D^\alpha u = 0 \text{ en } \partial\Omega\}$$

A partir de esta clase de espacios buscamos dos cosas: Permitir definir de manera apropiada el operador espacial y, además, obtener un método para probar que *soluciones débiles* convergen a *soluciones fuertes*. El primer problema se soluciona gracias a los siguientes espacios.

Definición 2.5. *Para $1 \leq p < \infty$, definimos $W_0^{1,p}(\Omega)$ como la clausura de $C_c^1(\Omega)$ en $W^{1,p}(\Omega)$.*

En particular, definimos $H_0^1(\Omega) = W_0^{1,2}(\Omega)$. Ambos se extienden de manera natural para $m \geq 2$.

Observación 2.6. *En estos espacios buscamos "evaluar en la frontera". Esto último es un golazo. (¿Cómo evaluamos clases de equivalencias en un conjunto de medida nula?). La manera rigurosa de sobrepasar esto es definiendo un* operador traza*, pero no nos da el tiempo para eso.*

Otra propiedad interesante es que tenemos la siguiente estimación.

Theorem 2.7 (Desigualdad de Poincaré)**.** *Sea $u \in H_0^1(\Omega)$. Entonces se tiene*

$$\int_\Omega |u|^2 dx \leq C \int_\Omega |\nabla u|^2 dx.$$

Corolario 2.8. *Si $u \in H_0^1(\Omega)$, entonces las normas $\|\cdot\|_{H_0^1(\Omega)}$ y $|||\cdot|||_{H_0^1(\Omega)} := \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}$ son equivalentes.*

Proof. Basta notar que que para $u \in H_0^1(\Omega)$, por la desigualdad de Poincaré,

$$\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \leq \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla u\|_\Omega^2 \leq K \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2$$

□

El segundo problema se resuelve con el Teorema de Rellich-Kondrachov.

Theorem 2.9 (Rellich-Kondrachov)**.** *Suponga que Ω es acotado y de clase C^1. Entonces tenemos las siguientes inyecciones compactas.*

1. *$W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ para todo $q \in [1, p^*)$ con $1/p^* = 1/p - 1/N$ si $p < N$.*
2. *$W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ para todo $[p, +\infty)$ si $p = N$.*
3. *$W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow C(\overline{\Omega})$ si $p > N$.*

En particular, la inyección $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$ es compacta para todo p y N.

Aquí, entendemos un operador compacto $T : E \to F$ entre espacios de Banach como un operador tal que $T(B_E)$ tiene clausura compacta en F para la topología fuerte.

2.1 Operadores diferenciales y espacios de Sobolev en variedades

A grandes rasgos la extensión desde $\mathbb{R}^n$ a la variedad M no es una tarea tan difícil. Hay que adaptar los operadores diferenciales al contexto de variedades, que ya se hizo en sesiones anteriores, pero que adjuntamos por completitud. La parte más difícil es definir los espacios de Sobolev en variedades, para lo cual usamos particiones de la unidad.

Considere (M, g) una variedad Riemanniana compacta. Sea $\{u_i : U_i \subset \mathbb{R}^n \to M\}$ un atlas para M donde $\overline{U_i}$ es compacto. Escriba $\{\rho_i : M \to [0, 1]\}$ una partición de la unidad asociada a $\{U_i\}|_{i\in I}$. Definimos $H^s(M)$ como la completación de $C_0^\infty(M)$ con respecto a la norma

$$\|\phi\|^2_{H^s(M)} := \sum_i \|\rho_i \phi \circ u_i\|^2_{H^2(\Omega)}.$$

2.2 Espacios de Böchner

Hasta el momento solo hemos atacado problemas estacionarios. Para estudiar problemas del tipo hiperbólicos o parabólicos necesitamos introducir un nuevo espacio funcional que nos permita compatibilizar regularidades en tiempo y espacio.

Definición 2.10 (Espacios de Böchner)**.** *Sea X un espacio de Banach. Definimos el espacio de Böchner $L^p([0, T]; X)$ como el espacio de funciones:*

$$L^p([0, T]; X) := \{u(t, x) : \int_0^T \|u(t)\|^p_X d\mu(t) < \infty\}$$

Se puede probar que estos espacios son de Banach.

3 Sobre la existencia y solución

La idea de separación de variables es que permite separar la parte espacial de la temporal. Formalmente, esto se describe mediante la teoría de semigrupo de operadores para problemas de evolución. Para problemas elípticos tenemos Lax-Milgram.

Theorem 3.1 (Lax-Milgram)**.** *Sea H un espacio de Hilbert y $B : H \times H \to \mathbb{R}$ una forma bilineal continua y coercitiva. Sea $f : H \to \mathbb{R}$ un funciona lineal continuo de H. Entonces existe un único elmeento $u \in H$ que satisface*

$$B[u, v] = \langle f, v\rangle, \qquad \forall v \in H.$$

Ejemplo 3.2. *Considere $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ una región de frontera C^2. Pruebe la existencia y unicidad de soluciones débiles para el problema*

$$\begin{cases} -\Delta u + u = f, \quad x \in \Omega, \\ u = 0, \quad x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

donde $f \in L^2(\Omega)$.

Usamos la formulación débil y que $C_0^\infty(\Omega)$ es denso en $H_0^s(\Omega)$. Queremos, además, determinar la buena regularidad del problema. Note que como $f \in L^2(\Omega)$, $-\Delta u, u \in L^2(\Omega)$. Esto es suficiente para decir que $u \in H^2(\Omega)$. (Aquí, usamos algo conocido como regularidad elíptica*). Por otro lado, la condición de frontera $u = 0$ en $\partial\Omega$ nos dice que $u \in H_0^1(\Omega)$. Por tanto esperamos a posteriori que $u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$.*

Sea $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$. Trabajamos sobre $H_0^1(\Omega)$. Multiplicando la ecuación por φ, integrando y usando la condición de frontera obtenemos que

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla\varphi + u\varphi = \int_\Omega f\varphi.$$

Esto hace que, de cierta manera, ya no tenemos que trabajar con el laplaciano. Denotamos por

$$B(u, v) = \int_\Omega (\nabla u \cdot \nabla v + uv)dx, \qquad L(v) = \int_\Omega fvdx.$$

Por Lax-Milgram, el problema admite solución única débil en $H_0^1(\Omega)$.

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ región con frontera $\partial\Omega$. Denote por Q y Σ a $\Omega \times (0, \infty)$ y $\partial\Omega \times (0, +\infty)$, respectivamente.

Theorem 3.3 (Existencia y unicidad para la Ecuación de Calor Dirichlet)**.** *Considere el problema*

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u = 0, \quad Q, \\ u = 0, \quad \Sigma, \\ u(x, 0) = u_0(x), \quad \Omega. \end{cases}$$

Si $u_0 \in L^2(\Omega)$, entonces existe única solución $u(x, t)$ tal que

$$u \in C([0, +\infty); L^2(\Omega)) \cap C((0, \infty); H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)),$$

y

$$u \in C^1((0, \infty); L^2(\Omega)).$$

Theorem 3.4 (Existencia y unicidad para la Ecuación de Ondas)**.**

$$\begin{cases} \partial_t^2 u - \Delta u = 0, \quad Q, \\ u = 0, \quad \Sigma, \\ u(x, 0) = u_0(x), \quad \Omega, \\ u_t(x, 0) = v_0(x), \quad \Omega. \end{cases}$$

Suponga que $u_0 \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ y $v_0 \in H_0^1(\Omega)$. Entocnes existe una única solución del problema anterior que satisface

$$u \in C([0,\infty); H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)) \cap C^1([0,\infty); H_0^1(\Omega)) \cap C^2([0,\infty); L^2(\Omega)).$$

Observación 3.5. *Gracias al teorema de descomposición espectral, sabemos que podemos expandir $-\Delta$ en términos de una base ortonormal $\{\varphi_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq L^2(\Omega)$ con valores propios $\{\lambda_k\}_{k\in\mathbb{N}}$. Los dos problemas anteriores se pueden resolver usando el problema de Sturm-Liouville, al igual que en la primera sección.*

Ejemplo 3.6. *Las condiciones de frontera pueden modificar la descomposición espectral del operador. Considere la ecuación de Kuramoto-Sivashinsky lineal en el intervalo $[0,1]$.*

$$\partial_t u + \partial_{xxxx} u + \lambda \partial_{xx} u = 0.$$

Aquí, $\lambda > 0$ es el coeficiente de anti-difusión. Si tomamos $u_0(x) \in L^2(\Omega)$, podemos considerar el problema con condiciones de frontera

$$u(0) = u(1) = u_{xx}(0) = u_{xx}(1) = 0,$$

y también con

$$u(0) = u(1) = u_x(0) = u_x(1) = 0.$$

En el primer caso, denotamos por $\{\varphi_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ y $\{\nu_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ a la base ortonormal de funciones propias y valores propios respectivamente del problema de Sturm-Liouville

$$\phi'' + \nu\phi = 0, \qquad \phi(0) = \phi(1) = 0.$$

Resolviendo por separación de variables, uno encuentra respectivamente

$$\nu_n = n^2\pi^2, \qquad \varphi_n(x) = \sqrt{2}\sin(\sqrt{\lambda_n}x), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Más aún, expandiendo soluciones en la forma

$$w(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} w_k(t)\varphi_k(x),$$

uno obtiene que

$$w_k(t) = (-\nu_n^2 + \lambda\nu_n)w_n(t).$$

Note que los valores propios son no negativos. En el segundo caso, también encontramos una base ortonormal ψ_k con valores propios μ_n. Sin embargio, obtener las expresiones explícitas es mucho más difícil. Más aún, uno obtiene la siguiente cota:

$$\mu_n \leq \frac{\lambda^2}{4}, \qquad \forall \mu_n \in \mathbb{N}.$$

En otras palabras, hay finitos valores propios no negativos.

4 Análisis espectral del Laplaciano

Aquí usamos como referencia [3]. La parte de operadores diferenciales y los ejemplos vienen de este apunte

Primero recopilaremos algunos resultados sobre operadores diferenciales en variedades. Luego usamos esas herramientas para estudiar el espectro del operador de Laplace-Beltrami.

Consideraremos una variedad Riemanniana M de dimensión n con métrica g. Dada una función $\varphi \in C^\infty(M)$, sabemos que el mapa diferencial $d_x\varphi : T_xM \to \mathbb{R}$ es lineal para todo $x \in M$. Por tanto, existe un campo vectorial en TM, al que llamamos gradiente de φ y denotado $\nabla_g\varphi$ de modo que

$$\langle \nabla_g\varphi, X_x\rangle = d_x\varphi(X_x), \quad \forall X_x \in T_xM.$$

Formalmente,

Definición 4.1. *El gradiente es el operador*

$$\nabla_g : C^\infty(M) \to \Gamma_{C^\infty}(TM),$$

de modo que

$$\langle \nabla_g\varphi, X\rangle_g = d\varphi(X), \quad X \in \Gamma_{C^\infty}(TM).$$

En coordenadas locales, toma la forma

$$\nabla_g\varphi = \sum_{i,j=1}^n g^{ij}\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_j}.$$

Por la linealidad y regla del producto del diferencial d, tenemos además que

$$\nabla_g(\varphi+\psi) = \nabla_g\varphi + \nabla_g\psi, \qquad \nabla_g(\varphi\cdot\psi) = \varphi\cdot\nabla_g\psi + \psi\cdot\nabla_g\varphi.$$

Para definir la divergencia, tomemos una $n-$forma $\omega \in \Omega^n(M)$ y un campo vectorial X. Entonces podemos definir la $(n-1)-$forma $\iota_X\omega \in \Omega^{n-1}$ como

$$\iota_X\omega(X_1,\ldots,X_{n-1}) = \omega(X, X_1,\ldots,x_{n-1}),$$

donde $X_1,\ldots,X_{n-1}$ son campos vectoriales en M. Como $d(\iota_X\omega)$ es una $n-$forma, sabemos que debe existir un número $\operatorname{div}_\omega X$ como

$$d(\iota_X\omega) = \operatorname{div}_\omega X\cdot\omega.$$

Si ω_g es la forma de volumen de (M,g), enotonces el nímero anterior se concoe como la divergencia de X. A modo de operador, tenemos

Definición 4.2. *El operador divergencia es el mapa*

$$\operatorname{div}_g : \Gamma_{C^\infty}(TM) \to C^\infty(M),$$

que hace

$$d(\iota_X \omega_g) = \operatorname{div}_g X \cdot \omega_g, \quad \forall X \in \Gamma_{C^\infty}(TM).$$

En coordenadas locales para $X = \sum_{j=1}^n b_j \frac{\partial}{\partial x_j} \in \Gamma_{C^\infty}(TM)$, tenemos

$$\operatorname{div}_g X = \frac{1}{\sqrt{|\det g|}} \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i}(b_i \sqrt{|\det g|}).$$

Definición 4.3. *El operador de Laplace-Beltrami en (M, g) es el operador*

$$\Delta_g : C^\infty(M) \to C^\infty(M),$$

definido como

$$\Delta_g := -\operatorname{div}_g \circ \nabla_g$$

Gracias a que ∇_g y div_g son operadores lineales, se sigue que para $\varphi, \psi \in C^\infty(M)$,

$$\Delta_g(\varphi + \psi) = \Delta_g \varphi + \Delta_g \psi.$$

Además, se tiene que

$$\Delta_g(\varphi \cdot \psi) = \psi \Delta_g \varphi + \varphi \Delta_g \psi - 2\langle \nabla_g \varphi, \nabla_g \psi \rangle_g.$$

En coordenadas locales, tenemos que el operador de Laplace-Beltrami toma la forma

$$\Delta_g := -\frac{1}{\sqrt{|\det g|}} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(g^{ij} \sqrt{|\det g|} \frac{\partial}{\partial x_j} \right).$$

Ejemplo 4.4. *En $\mathbb{R}^n$, tenemos la métrica euclideana $G_{\mathbb{R}^n}$. Como $g_{i,j}(x) = \delta_{ij}$, se tiene que*

$$\Delta_{g_{\mathbb{R}^n}} = -\sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}.$$

Ejemplo 4.5. *En el semiplano superior $\mathbb{H} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$ con la métrica hiperbólica*

$$g_{\mathbb{H}}(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{1}{y^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{y^2} \end{pmatrix}.$$

En particular,

$$\Delta_{g_{\mathbb{H}}} = -y^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} - y^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

Ejemplo 4.6. *En la 2-esfera S^2 podemos usar coordenadas esféricas*

$$T : (0, \pi) \times (0, 2\pi) \to S^2 \subset \mathbb{R}^3, \quad (\theta, \phi) \mapsto (\sin\theta\cos\phi, \sin\theta\sin\phi, \cos\theta).$$

Por tanto, obtenemos la métrica

$$g_{S^2}(\theta, \phi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sin^2\theta \end{pmatrix},$$

de donde obtenemos

$$\Delta_{g_{S^2}} = -\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) - \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}.$$

Ejemplo 4.7 (Importante)**.** *Considere $f \in C^\infty(M)$ y g una métrica sobre una variedad Riemanniana M. Una deformación conforme de g es una métrica $\tilde{g} = e^f g$. La idea es que este cambio modifica la distancia entre puntos preservando los ángulos entre vectores. Se puede probar que*

1. $\nabla_{\tilde{g}} = e^{-f}\nabla_g$.
2. $\operatorname{div}_{\tilde{g}}(X) = \operatorname{div}_g(X) + \frac{n}{2}e^{-f}X(f)$.
3. $\Delta_{\tilde{g}} = e^{-f}\Delta_g + \left(1 - \frac{n}{2}\right)e^{-2f}\nabla_g f$.

Ejemplo 4.8 (El Laplaciano conmuta con isometrías)**.** *Sean $(M, g_M), (N, g_N)$ dos variedades Riemannianas y $\Phi : (M, g_M) \to (N, g_N)$ una isometría. Probaremos que*

$$\Delta_{g_M}\Phi^* = \Phi^*\Delta_{g_N}.$$

Pruebe que

1. $\Phi_*\nabla_{g_M}\Phi^* = \nabla_{g_N}$
2. $\Phi_* \operatorname{div}_{g_N}\Phi^* = \operatorname{div}_{g_M}$.
3. $\Delta_{g_M}\Phi^* = \Phi^*\Delta_{g_N}$.

4.1 Teorema de Green

Theorem 4.9 (Teorema de la divergencia)**.** *Sea M una variedad Riemanniana y $X \in \Gamma_{C^1}(TM)$. Entonces*

$$\int_M \operatorname{div}_g X\omega_g = \int_{\partial M}\langle X, \nu\rangle\sigma_g,$$

donde ν es el vector unitario normal a ∂M.

Theorem 4.10 (Teorema de Green)**.** *Sea (M, g) una variedad Riemanniana compacta con frontera ∂M. Sea $\psi \in C^1(\overline{M})$ y $\phi \in C^2(\overline{M})$. Entonces*

$$\int_M \psi \cdot \Delta_g\phi\omega_g = \int_M \langle\nabla_g\psi, \nabla_g\phi\rangle\omega_g - \int_{\partial M}\psi \cdot \frac{\partial\phi}{\partial\nu}\sigma_g.$$

Corolario 4.11. *Si (M, g) es una variedad Riemanniana compacta sin frontera, entonces*

$$\langle \psi, \Delta_g \phi \rangle_g = \langle \nabla_g \psi, \nabla_g \phi \rangle_g.$$

Corolario 4.12 (Formalmente autoadjunto)**.** *Si (M, g) es una variedad Riemanniana compacta sin frontera, entonces*

$$\langle \psi, \Delta_g \phi \rangle_g = \langle \phi, \Delta_g \psi \rangle_g.$$

Corolario 4.13 (Positividad)**.** *Si (M, g) es una variedad Riemanniana compacta sin frontera, entonces*

$$\langle \Delta_g \phi, \phi \rangle_g \geq 0.$$

4.2 Espectro del Laplaciano

Queremos probar que toda función L^2 en una variedad Riemanniana compacta M se puede expandir en términos de las funciones propias de Δ_g.

Definición 4.14. *Una función propia $f \in H^1(M)$ de Δ_g es una función no nula que satisface*

$$\Delta_g f(x) = \lambda f(x), \quad \forall x \in M.$$

El valor $\lambda \in \mathbb{R}$ se dice valor propio de Δ. El conjunto de todos los valores propios de Δ se denomina el espectro.

Theorem 4.15. *Sea M una variedad Riemanniana compacta. Entonces el problema de valores propios*

$$\Delta f = \lambda f, \quad f \in H^1(M),$$

tiene contables valores propios $\{\lambda_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ con funciones propias ortonormales $\{v_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ que satisfacen

$$\begin{aligned} \Delta v_m &= \lambda_m v_m, \\ \langle \nabla_g v_m, \nabla_g v_l \rangle &= \lambda_m \delta_{ml}. \end{aligned}$$

Más aún, todos los valores propios son positivos, y cumplen que

$$\lim_{m\to\infty} \lambda_m = \infty.$$

Para $f \in L^2(M)$, tenemos

$$f = \sum_{i=0}^{\infty} \langle f, v_i \rangle_{L^2(M)} v_i,$$

donde la serie converge en $L^2(M)$, y si $f \in H^1(M)$ se tiene

$$\langle \nabla_g f, \nabla_g f \rangle = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i \langle f, v_i \rangle^2_{L^2(M)}.$$

Proof. Por la positividad del operador, $\lambda \geq 0$. En particular $\lambda = 0$ es siempre un valor propio. Defina

$$\lambda_1 := \inf_{f \in H^1(M): \int_M f = 0} \frac{\langle \nabla_g f, \nabla_g f \rangle_g}{\langle f, f \rangle_g} > 0,$$

y sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión minimizante en $H_0 = \{f \in H^1(M) : \int_M f = 0\}$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\langle \nabla_g f_n, \nabla_g f_n \rangle_g}{\langle f, f \rangle_g} = \lambda_1.$$

Podemos asumir sin pérdida de generalidad que $\|f_n\| = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Esto junto con el límite anterior nos dice que

$$\|\nabla_g f_n\| \leq K,$$

por lo que podemos extraer una subsucesión $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ que converge débil a $v_i \in H^1(M)$. Por el Teorema de Rellich-Kondrachov, $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ converge fuerte en $L^2(M)$ a v_1, por lo que

$$\|v_1\| = 1.$$

Ahora, gracias a que $\|\nabla_g f\|_{L^2(M)}$ es semicontinua inferior para la convergencia débil en $H^1(M)$ por la desigualdad de Poincaré, se tiene que

$$\lambda_1 \leq \langle \nabla_g v_1, \nabla_g v_1 \rangle \leq \lim_{n\to\infty} \langle \nabla_g f_n, \nabla_g f_n \rangle = \lambda_1,$$

por lo que

$$\frac{\langle \nabla_g v_1, \nabla_g v_1 \rangle}{\langle v_1, v_1 \rangle} = \lambda_1.$$

Suponga que $(\lambda_1, v_1), \ldots, (\lambda_{m-1}, v_{m-1})$ ya se determinaron con $\lambda_1, \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_{m-1}$ y tales que

$$\Delta_g v_i = \lambda_i v_i,$$

y

$$\langle v_i, v_j \rangle_{L^2(M)} = \delta_{ij}.$$

Definimos

$$H_m = \{f \in H^1(M) : (f, v_i) = 0, \quad \forall i = 1, \ldots, m-1\},$$

y

$$\lambda_m := \inf_{f \in H_m \setminus \{0\}} \frac{\langle \nabla_g f, \nabla_g f \rangle_g}{\langle f, f \rangle_{L^2(M)}}.$$

Por el argumento anterior, podemos encontrar $v_m \in H$ con $\|v_m\| = 1$ de modo que

$$\lambda_m = \langle \nabla_g v_m, \nabla_g v_m \rangle = \frac{\langle \nabla_g v_m, \nabla_g v_m \rangle}{\langle v_m, v_m \rangle}.$$

En particular, como $H_m \subseteq H_{m-1}$ se tiene que $\lambda_{m-1} \leq \lambda_m$. Además, H_m es un espacio de Hilbert por ser el complemento ortogonal de un subespacio finito dimensional.

Afirmamos que

$$\Delta_g v_m = \lambda_m v_m.$$

Por la definición de λ_m, se tiene que para todo $\varphi \in H_m$ y $t \in \mathbb{R}$ se tiene

$$\frac{\langle \nabla_g (v_m + t\varphi), \nabla_g (v_m + t\varphi)\rangle}{\langle v_m + t\varphi, v_m + t\varphi\rangle} \geq \lambda_m,$$

derivando con respecto a t y usando que este valor es un mínimo, se tiene que

$$0 = 2(\langle \nabla_g v_m, \nabla \varphi\rangle - \lambda_m \langle v_m, \varphi\rangle), \quad \forall \varphi \in H_m.$$

Por ortogonalidad para $i = 1, \ldots, m-1$, se tiene que

$$\langle \nabla_g v_m, \nabla_g v_i\rangle = \langle \nabla_g v_i, \nabla_g v_m\rangle = \lambda_i \langle v_i, v_m\rangle = 0,$$

por lo que

$$\langle \nabla_g v_m, \nabla_g \varphi\rangle - \lambda_m \langle v_m, \varphi\rangle = 0, \qquad \forall \varphi \in H^1(M).$$

En otras palabras, v_m es una solución débil de

$$\int_M \nabla_g v_m(x) \nabla_g \varphi(x) \sqrt{|\det g|} dx_1, \ldots, dx_n = \lambda_m \int_M v_m(x)\varphi(x)\sqrt{|\det g|} dx_1, \ldots, dx_n, \qquad \forall \varphi \in H^1(M).$$

Por tanto, $v_m \in C^\infty(M)$ y $\Delta v_m = \lambda_m v_m$.

Ahora, defina

$$\alpha_i = \langle f, v_i\rangle_{L^2(M)}, \quad \forall i \in \mathbb{N},$$

junto con

$$f_m := \sum_{i=1}^{m} \alpha_i v_i, \qquad \varphi_m := f - f_m.$$

De este modo, φ_m es la proyección ortogonal de f en H_{m+1}, el subespacio de H generado por $v_1, \ldots, v_m$. Se sigue que

$$\langle \varphi_m, v_i\rangle = 0, \quad i = 1, \ldots, m.$$

Por la definición de λ_{m+1},

$$\langle nabla_g \varphi_m, \nabla_g \varphi_m\rangle \geq \lambda_{m+1} \langle \varphi_m, \varphi_m\rangle.$$

De las estimaciones anteriores, $\langle \nabla_g \varphi_m, \nabla_g v_i \rangle = 0$ para $i = 1, \dots, m$. Por lo anterior,

$$\langle \varphi_m, \varphi_m \rangle = \langle f, f \rangle - \langle f_m, f_m \rangle.$$

Por tanto,

$$\langle \nabla_g \varphi_m, \nabla_g \varphi_m \rangle = \langle \nabla_g f, \nabla_g f \rangle - \langle \nabla_g f_m, \nabla_g f_m \rangle.$$

Las cotas anteriores nos dicen que

$$\langle \varphi_m, \varphi_m \rangle \leq \frac{1}{\lambda_{m+1}} \langle \nabla_g f, \nabla_g f \rangle,$$

y como $\lambda_m \to \infty$, se sigue que $\varphi_m \to 0$ en $L^2(M)$. Por tanto,

$$f = \lim_{m \to \infty} f_m = \sum_{i=1}^{\infty} \langle f, v_i \rangle v_i, \quad \text{en } L^2(M).$$

Por tanto,

$$\nabla_g f_m = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \nabla_g v_i,$$

de donde se sigue,

$$\langle \nabla_g f_m, \nabla_g f_m \rangle = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i^2 \langle \nabla_g v_i, \nabla_g v_i \rangle = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i \alpha_i^2.$$

Ahora, dado que la sucesión es minimizante, $\langle \nabla_g f_m, \nabla_g f_m \rangle \leq \langle \nabla_g f, \nabla_g f \rangle$ y como todo los λ_i son positivos, la serie anterior converge. □

5 Aplicaciones

5.1 El problema de Yamabe

Aquí usamos el siguiente apunte como referencia.

El tensor de Ricci es de tipo $(0, 2)$ covariante, simétrico y definido de la siguiente manera. Dado $p \in M$ y $X, Y \in T_pM$, definimos

$$\mathrm{Ricc}_p(X, Y) = \mathrm{tr}(z \mapsto R(X, z)Y),$$

donde R es el tensor de curvatura de (M, g), es decir,

$$R(X, Y)Z = \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{[X,Y]} Z.$$

Si $\{e_1, \dots, e_n\}$ es una base ortonormal de T_pM, se tiene que

$$\mathrm{Ricc}_p(X, Y) = \sum_{i=1}^{n} R(X, e_i, Y, e_i),$$

donde R denota el tensor de curvatura de tipo $(0,4)-$covariante

$$R(X,Y,Z,V) = g(R(X,Y)Z,V).$$

La curvatura escalar es la función diferenciable $s_g : M \to \mathbb{R}$ que se obtiene de tomar la traza del tensor de Ricchi. Usando la base ortonormal, la expresión viene dada por

$$s_g(p) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Ricc}(e_i, e_i) = \sum_{1 \le i,j \le n} R(e_i, e_j, e_i, e_j).$$

Si denotamos por $K(e_i, e_j)$ a la curvatura seccional del subespacio tangente $\mathrm{span}(e_i, e_j)$, la curvatura escalar de (M, g) en p es

$$s_g(p) = \sum_{1 \le i \ne j \le n} K(e_i, e_j),$$

es decir, un múltiplo del promedio de las curvaturas seccionales.

A grandes rasgos, la curvatura escalar dice cómo la geometría de la variedad modifica el volumen de una bola.

Denotaremos por $\mathcal{M}_M$ al conjunto de métricas Riemannianas de M. La clase conforme de $g \in \mathcal{M}_M$, que denotamos por $[g]$, es el siguiente subconjunto

$$[g] := \{fg : f \in C^{\infty}_{>0}(M)\}.$$

Problema de Yamabe

Dada (M, g) una variedad Riemanniana de dimensión n, cerrada, compacta y sin borde con $n \ge 3$. ¿Existe una métrica $h \in [g]$ de curvatura escalar constante?

Consideremos una métrica h en la clase conforme $[g]$. Si escribimos a h como $h = u^{p_n - 2} g$, con $u \in C^{\infty}_{>0}(M)$ y $p_n = \frac{2n}{n-2}$, se tiene que su curvatura escalar esta dada por

$$s_h = u^{1-p_n} \left(a_n \Delta_g u + s_g u \right) = L_g(u),$$

donde $a_n = \frac{4n}{n-2}$.

El factor $a_n \Delta_g u + s_g u$ que aparece en la parte derecha de la igualdad anterior corresponde a un importante operador lineal llamado Laplaciano conforme de (M, g) y que notaremos con L_g. Una propiedad importante del operador L_g, que utilizaremos a menudo, es su invarianza conforme. Es decir, si $h = u^{p_n - 2} g$, entonces el Laplaciano conforme satisface

$$L_h(\varphi) = u^{1-p_n} L_g(u\varphi).$$

En este caso, $u^{p_n-2}g$ sería una métrica de curvatura escalar f. Veamos que la igualdad anterior se satisface. Sea $h = u^{p_n-2}g$ una métrica conforme, luego en coordenadas locales $(x^1, ..., x^n)$ tenemos

$$\Delta_h f = -\frac{1}{\sqrt{|\det h|}} \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x^i} \left(h^{ij} \sqrt{|\det h|} \frac{\partial \varphi}{\partial x^j} \right)$$

Dado que

$$\sqrt{|\det h|} = u^{p_n} \sqrt{|\det g|}$$

se sigue que

$$\begin{aligned}
\Delta_h f &= -\frac{1}{u^{p_n}\sqrt{|\det g|}} \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x^i} \left(u^{2-p_n} g^{ij} u^{p_n} \sqrt{|\det g|} \frac{\partial \varphi}{\partial x^j} \right) \\
&= -\frac{1}{u^{p_n}\sqrt{|\det g|}} \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x^i} \left(u^2 g^{ij} \sqrt{|\det g|} \frac{\partial \varphi}{\partial x^j} \right) \\
&= -\frac{1}{u^{p_n}\sqrt{|\det g|}} \sum_{i,j=1}^{n} \left(2u \frac{\partial u}{\partial x^i} g^{ij} \sqrt{|\det g|} \frac{\partial \varphi}{\partial x^j} + u^2 \frac{\partial}{\partial x^i} \left(g^{ij} \sqrt{|\det g|} \frac{\partial \varphi}{\partial x^j} \right) \right) \\
&= \frac{1}{u^{p_n-2}} \Delta_g \varphi - \frac{2}{u^{p_n-1}} \langle \nabla u, \nabla \varphi \rangle
\end{aligned}$$

Por otro lado, tenemos que para la curvatura seccional se satisface

$$S_h \varphi = u^{1-p_n} (\varphi a_n \Delta_g u + s_g u \varphi)$$

De este modo, usando la definición de Laplaciano conforme se tiene que

$$\begin{aligned}
L_h \varphi &= a_n \Delta_h \varphi + u \Delta_g \varphi \\
&= \frac{a_n}{u^{p_n-2}} \Delta_g \varphi - \frac{2a_n}{u^{p_n-1}} \langle \nabla_g u, \nabla_g \varphi \rangle + \frac{1}{u^{p_n-1}} \varphi a_n \Delta_g u + s_g u^{2-p_n} \varphi \\
&= u^{1-p_n} \left(a_n u \Delta_g \varphi + a_n \varphi \Delta_g u - 2a_n \langle \nabla_g u, \nabla_g \varphi \rangle + s_g u \varphi \right) \\
&= u^{1-p_n} \Delta_g (u\varphi) + u^{1-p} s_g (\varphi u) \\
&= u^{1-p_n} L_g (\varphi u).
\end{aligned}$$

En particular, estaremos interesados cuando $f \equiv c$ es constante . Es decir, buscamos soluciones positivas de

$$L_g(u) = c u^{p_n-1}.$$

Esta última ecuación recibe el nombre de ecuación de Yamabe.

Consideremos el funcional $Y : [g] \longrightarrow \mathbb{R}$ definido por

$$h \in [g] \longrightarrow Y(h) := \frac{\int_M s_h dv_h}{\mathrm{Vol}(M,h)^{\frac{n-2}{n}}}.$$

Si $h = u^{p_n - 2} g$, su elemento de volumen es $dv_h = u^{p_n} dv_g$. Aplicando la igualdad (6) podemos escribir el funcional Y como

$$Y(h) = \frac{\int_M L_g(u) u dv_g}{\left(\int_M u^{p_n} dv_g\right)^{\frac{n-2}{n}}} = \frac{\int_M a_n u \Delta_g u + s_g u^2 dv_g}{\left(\int_M u^{p_n} dv_g\right)^{\frac{n-2}{n}}}.$$

Luego, utilizando la fórmula de Green $\int_M u \Delta_g v dv_g = \int_M \langle \nabla u, \nabla v \rangle dv_g$, obtenemos que

$$Y(h) = \frac{\int_M a_n |\nabla u|_g^2 + s_g u^2 dv_g}{\|u\|_{p_n}^2},$$

el funcional de Yamabe induce un funcional en $C^\infty_{>0}(M)$

$$u \in C^\infty_{>0}(M) \longrightarrow Y_g(u) = Y\left(u^{p_n - 2} g\right).$$

A este funcional también lo llamaremos funcional de Yamabe, y para no sobrecargar innecesariamente la notación, también lo notaremos con Y, siempre y cuando quede claro la métrica que estemos usando. De todas formas, gracias a la invarianza conforme de L_g tenemos que

$$Y_h(v) = \frac{\int_M L_h(v) v dv_h}{\left(\int_M v^{p_n} dv_h\right)^{\frac{n-2}{n}}} = \frac{\int_M u^{1-p_n} L_g(uv) v u^{p_n} dv_g}{\left(\int_M v^{p_n} u^{p_n} dv_g\right)^{\frac{n-2}{n}}} = Y_g(uv).$$

La relación entre el funcional y la ecuación de Yamabe queda establecida en la siguiente proposición:

Proposición 5.1. *Sea $u \in C^\infty_{>0}(M)$. Luego, u es un punto crítico de Y si y solo si u es solución de la ecuación de Yamabe con constante $c = \frac{Y(u)}{\|u\|_{p_n}^{p_n - 2}}$.*

Proof. Una función u es un punto crítico de Y si y solo si para toda $\varphi \in C^\infty(M)$ se tiene que

$$\left.\frac{\partial Y(u + t\varphi)}{\partial t}\right|_{t=0} = 0$$

Desarrollando el funcional de Yamabe obtenemos que

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t} Y(u+t\varphi)\Big|_{t=0} &= \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\int_M L_g(u+t\varphi)(u+t\varphi)dv_g}{\|u+t\varphi\|_{p_n}^2}\right)\Big|_{t=0} \\
&= \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\int_M L_g(u)u + 2tL_g(u)\varphi + t^2 L_g(\varphi)\varphi dv_g}{\|u+t\varphi\|_{p_n}^2}\right)\Big|_{t=0}.
\end{aligned}
$$

En la última igualdad, utilizamos que L_g es un operador autoadjunto, es decir que satisface que $\int_M L_g(u)\varphi dv_g = \int_M L_g(\varphi)uv_g$, lo cual se deduce de la fórmula de Green.

Tenemos que

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t} Y(u+t\varphi)\Big|_{t=0} &= \frac{\left(\int_M 2L_g(u)\varphi dv_g\right)||u||_{p_n}^2 - 2||u||_{p_n}^{2-p_n}\left(\int_M |u|^{p_n-1}\varphi dv_g\right)\left(\int_M L_g(u)udvg\right)}{||u||_{p_n}^4} \\
&= \frac{\left(\int_M 2L_g(u)\varphi dv_g\right)||u||_{p_n}^2 - 2||u||_{p_n}^{2-p_n}\left(\int_M |u|^{p_n-1}\varphi dv_g\right)Y(u)\left(\int_M |u|^{p_n}dvg\right)^{\frac{n-2}{2n}\cdot 2}}{||u||_{p_n}^4} \\
&= \frac{\left(\int_M 2L_g(u)\varphi dv_g\right)||u||_{p_n}^2 - 2||u||_{p_n}^{2-p_n}\left(\int_M |u|^{p_n-1}\varphi dv_g\right)Y(u)||u||_{p_n}^2}{||u||_{p_n}^4} \\
&= \frac{\left(\int_M 2L_g(u)\varphi dv_g\right) - 2||u||_{p_n}^{2-p_n}\left(\int_M |u|^{p_n-1}\varphi dv_g\right)Y(u)}{||u||_{p_n}^2} \\
&= \frac{2}{||u||_{p_n}^2}\int_M \left(L_g(u) - ||u||_{p_n}^{2-p_n}Y(u)|u|^{p_n-1}\right)\varphi dv_g
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, u es un punto crítico de Y si y solo si para toda $\varphi \in C^\infty(M)$ se tiene que

$$
\int_M \left(L_g(u) - Y(u)\|u\|_{p_n}^{2-p_n}u^{p_n-1}\right)\varphi dv_g = 0,
$$

lo cual es equivalente a que u sea solución de la ecuación de Yamabe con la constante anunciada, pues dado que $L_g(u) = c|u|^{p_n-1}$, se sigue que

$$
c|u|^{p_n-1} - ||u||_{p_n}^{p_n-2}Y(u)|u|^{p_n-1} = 0
$$

de donde se obtiene

$$
c = \frac{Y(u)}{||u||_{p_n}^{p_n-2}}.
$$

□

Es decir, la ecuación de Yamabe es la ecuación de Euler-Lagrange del funcional de Yamabe. Desde un enfoque variacional, el problema de encontrar métricas de curvatura escalar constante en una clase conforme es equivalente a encontrar puntos críticos de Y.

Notar que el funcional de Yamabe esta acotado inferiormente. En efecto, si $s_g \geq 0$, entonces tenemos que

$$Y(u) = \frac{\displaystyle\int_M a_n |\nabla_g u|^2 + s_g |u|^2 dv_g}{||u||_{p_n}^2} \geq 0$$

por otro lado, si $0 > s_g > -\infty$, defina $\overline{s} = \min s_g$, luego dado que podemos usar la desigualdad de Hölder para probar que

$$\int_M u^2 dv_g \leq \left(\int_M u^{p_n} dv_g \right)^{\frac{2}{p_n}} \left(\int_M 1 dv_g \right)^{\frac{p_n - 2}{p_n}}$$

tenemos que

$$\overline{s} \int_M u^2 dv_g \geq \overline{s} \|u\|_{p_n}^2 \operatorname{vol}(M, g)^{\frac{2}{n}}.$$

y por tanto, podemos estimar inferiormente el funciona de Yamabe como

$$Y(u) \geq \frac{\displaystyle\int_M s_g |u|^2 dv_g}{\|u\|_{p_n}^2} \geq \overline{s} \frac{\displaystyle\int_M |u|^2 dv_g}{\|u\|_{p_n}^2} \geq \overline{s} \operatorname{vol}(M, g)^{\frac{2}{n}}$$

Entonces, definimos la constante de Yamabe de $(M, [g])$ como

$$Y(M, [g]) := \inf_{h \in [g]} Y(h) > -\infty$$

o bien equivalentemente,

$$Y(M, [g]) = \inf_{u \in C^\infty_{>0}(M)} Y_g(u).$$

Observación 5.2. *De la igualdad (11) se ve que efectivamente la constante de Yamabe es un invariante de la clase conforme. Es decir, si g y h están en la misma clase conforme se tiene que* $\inf_{u \in C^\infty_{>0}(M)} Y_g(u) = \inf_{u \in C^\infty_{>0}(M)} Y_h(u)$.

Notar que como $|\nabla |u|| = |\nabla u|$ para casi todo punto de M, se tiene que $Y_g(|u|) = Y_g(u)$. Luego, en la definición de la constante de Yamabe podemos tomar el ínfimo sobre $C^\infty(M) - \{0\}$ y la constante no cambia.

El enfoque variacional, es decir aquel que se centra en tratar de encontrar puntos críticos del funcional de Yamabe, es el que utilizaron Yamabe, Trüdinger, Aubin y Schoen para probar la existencia de métricas con curvatura scalar constante. Probaron el siguiente teorema, cuya prueba discutiremos en la Sección 5.

Theorem 5.3. *Sea (M^n, g) una variedad Riemanniana cerrada de dimensión $n \geq 3$. Luego, existe $h \in [g]$ tal que $Y(M, [g]) = Y(h)$.*

Corolario 5.4. *Toda clase conforme admite una métrica de curvatura escalar constante.*

En una clase conforme no puede haber dos métricas de curvatura escalar con distinto signo. En efecto, si s_g es una función positiva, luego para una métrica de la forma $h = u^{p_n - 2} g$ tenemos que

$$\int_M \Delta_g u dv_g + \int_M s_g u dv_g = \int_M s_h u^{p_n - 1} dv_g.$$

Por el teorema de la divergencia sabemos que

$$\int_M \Delta_g u dv_g = 0$$

con lo cual,

$$0 < \int_M s_g u dv_g = \int_M s_h u^{p_n - 1} dv_g.$$

Por lo tanto, s_h no puede ser una función no positiva, es decir, $s_h \geq 0$, excluyendo por su puesto a la función nula, o bien s_h cambia de signo.

Del mismo modo si s_g es una función negativa y $h \in [g]$, se tiene que s_h no puede ser una función no negativa. Por otro lado, si s_g es la función nula y $h = u^{p_n - 2} g$, tenemos de (13) que

$$\int_M s_h u^{p_n - 1} dv_g = 0$$

con lo cual, $s_h \equiv 0$, o bien es una función que cambia de signo.

De estas observaciones podemos deducir que el signo de la constante de Yamabe determina el signo de las curvaturas escalares que admite la clase conforme:

Proposición 5.5. *Sea (M^n, g) una variedad Riemanniana cerrada de dimensión $n \geq 3$:*

1. *$Y(M, [g]) > 0$ si y solo si existe $h \in [g]$ con $s_h > 0$.*
2. *$Y(M, [g]) = 0$ si y solo si existe $h \in [g]$ con $s_h = 0$.*
3. *$Y(M, [g]) < 0$ si y solo si existe $h \in [g]$ con $s_h < 0$.*

Proof. La condición necesaria viene del Teorema anterior. Para la otra dirección, suponga que h es una métrica con $s_h > 0$. Por elTeorema anterior existe $\tilde{h} \in [h] = [g]$ con $s_{\tilde{h}}$ constante que minimiza el funcional de Yamabe. Se sigue que $s_{\tilde{h}} > 0$, en efecto, para $h = u^{p_n-2}g$ tenemos que

$$\int_M s_g u dv_g = \int_M \Delta_g u dv_g + \int_M s_g u dv_g = \int_M s_h u^{p_n-1} dv_g.$$

Como $s_g > 0$,, se tiene que $s_h \geq 0$, es decir, debe ser del mismo signo. Esto implica que

$$Y(M,[g]) = Y(\tilde{h}) = s_{\tilde{h}} \operatorname{Vol}(M,\tilde{h})^{2/n} > 0.$$

□

5.2 Otro problema de geometría conforme

La gracia de los problemas de geometría conforme es que típicamente se reducen a estudiar sistemas de ecuaciones en derivadas parciales. Otro problema similar al de Yamabe es el de Q-curvatura.

La Q-curvatura es la mitad de la curvatura escalar para sueprficies, y para variedades conformementes planas de dimensión 4, su integral es un múltiplo de la característica de Euler.

Si (M,g) es una variedad Riemanniana compacta $n-$dimensional. Para $n \geq 3$, la $Q-$curvatura viene dada por

$$Q = -\frac{1}{2(n-1)}\Delta s_g - \frac{2}{(n-2)^2}|\operatorname{Ricc}|^2 + \frac{n^3-4n^2+16n-16}{8(n-1)^2(n-2)^2}s_g^2.$$

Dado un marco local $\{e_1,\ldots,e_n\}$, podemos escribir lo anterior como el operador de Paneitz:

$$P\varphi = \Delta^2\varphi + \frac{4}{n-2}\operatorname{div}(\operatorname{Ricc}(\nabla\varphi,e_i)e_i) - \frac{n^2-4n+8}{2(n-1)(n-2)}\operatorname{div}(s_g\nabla\varphi) + \frac{n-4}{2}Q\varphi.$$

Uno tiene propiedades similares a los del problema de Yamabe. Por ejemplo, bajo transformaciones conformes de la métrica se tiene que

$$P_{\rho^{\frac{4}{n-4}}g}\varphi \cdot \psi d\mu_{\rho^{\frac{4}{n-4}}g} = P_g(\rho\varphi)\cdot\rho\psi d\mu_g.$$

References

[1] Haim Brezis. *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*. Nov. 2010. DOI: 10.1007/978-0-387-70914-7. URL: https://doi.org/10.1007/978-0-387-70914-7.

[2] Lawrence C. Evans. *Partial differential equations*. American Mathematical Soc., Jan. 2010.

[3] Jurgen Jost. *Riemannian Geometry and Geometric Analysis*. Jan. 15, 2014.