

UNIVERSIDAD TÉCNICA FEDERICO SANTA MARÍA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Feedback stabilization of the linear Kuramoto-Sivashinsky equation with saturated controls

Tesis presentada por

Felipe Nicolás Labra Irribarra

como requisito parcial para optar al título profesional de Ingeniero Civil Matemático

Codirector de tesis

Patricio Guzmán

Departamento de Matemática, Valparaíso

Codirector de tesis

Hugo Parada

Institut de Mathématiques de Toulouse, Toulouse

Valparaíso, Agosto, 2024.

Información general

Yo, **Felipe Nicolás Labra Irribarra**, presento este trabajo titulado, **"Feedback stabilization of the linear Kuramoto-Sivashinsky equation with saturated controls"**, en cumplimiento parcial de los requisitos para el título de Ingeniería Civil Matemática de la Universidad Técnica Federico Santa María.

Comisión evaluadora

Nicolás Carreño
UTFSM, Departamento de Matemática, Santiago. _____

Eduardo Cerpa
PUC, Facultad de Matemática Santiago. _____

Patricio Guzmán
UTFSM, Departamento de Matemática, Valparaíso. _____

Hugo Parada
IMT, Toulouse. _____

Hector Ramírez
UTFSM, Departamento de Electrónica, Valparaíso. _____

Resumen

Este documento trata sobre la estabilización interna de la ecuación de Kuramoto-Sivashinsky lineal. En primera instancia, se estudia el caso de un control interno de tipo feedback que posee ganancias por determinar. Gracias al análisis espectral del operador, se logra identificar una cantidad finita de valores propios que desestabilizan el sistema completo, obteniendo un control explícito que estabiliza el subsistema finito dimensional inestable que se encuentra desacoplado del otro subsistema infinito dimensional estable. Para el segundo problema se consideran controles saturados y se vuelven a identificar los subsistemas finito dimensional inestable e infinito dimensional estable, esta vez acoplados por la no linealidad de la saturación. Se desarrolla una estrategia basada en argumentos de LMI y condiciones geométricas para las saturaciones de modo que se pueda concluir la estabilización exponencial del sistema completo gracias a que el sistema se encuentra en cascada.

Abstract

This document deals with the internal stabilization of the linear Kuramoto-Sivashinsky equation. Initially, the case of an internal feedback control with undetermined gains is studied. Through the spectral analysis of the operator, unstable eigenvalues are identified. An explicit control is obtained, stabilizing the unstable finite-dimensional subsystem which is decoupled from the other stable infinite-dimensional subsystem. For the second problem, saturated controls are considered. Using the spectral analysis of the spatial operator, the unstable finite-dimensional and stable infinite-dimensional subsystems are identified, this time coupled. Exploiting the fact that the system is in cascade, a strategy based on LMI arguments and geometric conditions for saturations are developed, allowing to conclude the exponential stabilization of the entire system.

Dedicatoria

Para mis familiares que,
por razones políticas, sociales o económicas,
no pudieron estudiar.

Para las profesoras de Chile.

Agradecimientos

En primer lugar me gustaría agradecerle a mi papá y a mi mamá, Nelson Labra y Patricia Irribarra, su amor y apoyo han sido fundamental durante toda mi vida, siempre se han preocupado de que no me falte nada y han estado dispuestos a sacrificar su tiempo en mi beneficio. Podría dedicarme exclusivamente a agradecerles por el resto de mi vida, pero aún así sentiría que no es suficiente para mostrarles lo agradecido que estoy por tenerles como padres.

A mis hermanos, Vicente y Benjamín, a mi primo Edgar y a mi prima Maurén, porque tener la oportunidad de verles crecer, enfrentarse a desafíos y salir airosos es algo que me llena el alma. Sus logros y entusiasmo son mi motivación cuando me desvío de mi camino.

Para mi abuela, Zaida Toro, mi abuelo, Alejandro Irribarra y mi tía Chili, Alejandra Irribarra, por todo su cariño y el aliento que me han entregado cuando las cosas no salen como me gustaría. Gracias por todas las juntas y sus muestras de amor interminables.

Al profesor Patricio Guzmán, por ofrecerme una ayudantía de investigación e introducirme al mundo del control. A Hugo Parada por llegar en un momento crítico del trabajo y mostrar siempre disposición para ayudarme a pesar de la distancia. Les agradezco a ambos por preocuparse de mí más allá de lo matemático, por las conversaciones donde nos poníamos al día y por el buen humor que siempre hubo en nuestras reuniones. Su apoyo en los últimos desafíos a los que me he enfrentado ha sido muy importante para mi y me muestran que, a pesar de que a veces me encuentro atrapado en un agujero, no he hecho las cosas tan mal como pensaba. Agradezco al proyecto Fondecyt Iniciación 11240290 por haber financiado parcialmente esta memoria.

También me gustaría agradecer a los profesores que conocí en este tiempo y de quienes tengo bonitos recuerdos: Sergio Véliz, por ofrecerme mi primera ayudantía y encontrar algo que realmente me apasionaba, a Pedro Montero por su cercanía, consejos y por contagiarme el entusiasmo de saber de todo un poco porque nunca se sabe cuando lo necesitaremos, a Francisco Cuevas por su simpatía y la cercanía con estudiantes, ¡gracias por los consejos!, Alberto Mercado por su buena onda y la organización en el seminario de control donde aprendí mucho, a Michael Karkulik por las consultas que terminaban en reuniones no planificadas hablando de algún resultado random, por sus buenas energías y por el entusiasmo de que las actividades salieran bien. A Carolina Rey por mostrarme el mundo del análisis geométrico, su buena disposición y las ganas de organizar actividades que salieran adelante. (¡También por permitirme presentar por primera vez en un congreso!). También debo agradecerle a Cristóbal Loyola, Rogelio Arancibia y a Tomás Cortés, no solo por haber sido mis compañeros y referentes, si no que también por haberme permitido ser sus ayudantes en algunos cursos. Nunca me sentí tan cómodo y creo que hicimos un buen trabajo.

Cuando llegué al departamento luego de la pandemia tuve la suerte de compartir con Andrea, Astrik, Fabián y Don Manuel, quienes siempre me mostraron su disposición para ayudar en lo que pudieran. Gracias por sus consejos y confianza (¡y también por sus retos!).

Siempre he pensado que me debo a mis amigas y amigos, y además, creo que tengo la suerte de siempre encontrar tremendos grupos humanos. En mi primer año de u creamos el matemaçao, gracias por todas esas noches de estudio y de bebidas espirituosas. Por su apoyo y su disposición a enseñarme cuando no entendía, por las historias de metro, las tallas que cambiaban semana a semana y por las conversaciones en las que parecía que podíamos arreglar el mundo. Gracias por darme el apoyo emocional necesario cuando mi mundo se vino abajo en primer año. Desde ese momento entendí la suerte que tenía de contar con su compañía. Sin ustedes, la pandemia hubiese sido un periodo mucho más oscuro en mi vida.

Al hormigón y sus infinitas transformaciones, gracias por aceptarme en un espacio que me formó política y socialmente, por creer en un mejor futuro para la sociedad y por acompañarnos a pelear por ese ideal. Les agradezco por ser un apoyo en la parte académica y también en lo emocional, siempre me pareció un ambiente genial y dinámico con distintos

panoramas, a veces, más seguido de lo que esperaba. Con ustedes lograba desconectarme de mi realidad y ver el mundo con otros ojos.

A la sala de mate por ser un espacio al que no pensé que llegaría. Nuestra conexión fue sorprendentemente natural y en poco tiempo me vi compartiendo con ustedes como si nos conociéramos de hace mucho más tiempo. Gracias por participar conmigo en la orgánica estudiantil y por los proyectos que hicimos en conjunto, por las historias, tallas y salidas al nony de cada semana.

Dentro de estos grupos hay personas con las que compartí muchísimo pero pocas veces tuve la oportunidad de agradecerles algunas situaciones puntuales, a Emilio por no permitir que esta memoria sea de física teórica e intentar calzarme en todas las actividades que pudiera, a Catalina por su amistad, apañe y tallas pesadas, además de acompañarme en la orgánica estudiantil, a Sofía por su buena y mala onda, pero siempre ser un soporte cuando lo necesité (sobretodo cuando mi mundo se venía abajo en primer año), a Carlos por permitirme ser amigo de alguien a quien admiraba académicamente y siempre estar dispuesto a enseñar lo que sabía, a Farid y Matías por confiar en mi y haberme permitido entrar en sus círculos, les llevo en mi oreja con el mismo cariño del día en que nos hicimos un piercing por allá en el 2019.

Por último, me gustaría agradecerle a algunas personas que, si no hubieran llegado a mi vida, quizá no estaría donde hoy me encuentro.

A Javier Norambuena, por ser mi amigo de toda la vida y hacerme poner los pies sobre la tierra. Nuestras diferencias de perspectiva siempre han sido muy valiosas para mí, así como tu honestidad y asertividad para decirme cuando crees que he tomado una mala decisión. Tu perseverancia y disciplina son virtudes que siempre he admirado de ti.

A Pedro Tobar, por ser de las primeras personas que conocí en la U a quién pude llamar amigo. Gracias por conectar tanto conmigo y por aguantar mi humor, tus puntos de vista y filosofía de vida me llaman mucho la atención y creo que cada vez que tenemos una conversación termino aprendiendo algo nuevo, sea matemático o no. Eso es algo que creo que no puedo decir de muchas personas que conozca.

A Nicolás Muñoz, porque también fuiste de los primeros amigos que hice en la U. Agradezco haber compartido mi carrera completa contigo porque creo que, además de ser una gran persona, eres una persona realmente brillante. También te agradezco mucho haberme acercado más al mundo del artista. Extraño correr al metro para alcanzar el último de la noche, para después hablar de cualquier locura que se nos ocurriera camino a Quilpué. La vida es mucho más fácil con alguien como tú cerca.

A Amanda Salinas, por todo el amor, cariño, paciencia y apoyo que me has brindado estos años. A veces no puedo creer lo afortunado que soy por tenerte en mi vida y por haber tenido tantas experiencias lindas contigo en este periodo, incluyendo una relación en medio de la pandemia. Lamento que mis tallas sean fomes, pero si logro sacarte una linda sonrisa me puedo dar por pagado. Te quiero mucho y espero que la vida nos dé tiempo para agradecerte todo lo que has hecho por mi, y nos siga regalando recuerdos preciosos para que pueda atesorarlos hasta el fin de la eternidad.

El peso de esta etapa no lo he cargado solo. Espero que estas líneas sean una pequeña muestra de lo agradecido que estoy por haber podido llevar esta carga junto con ustedes. Desde lo más profundo de mi corazón, ¡gracias por coincidir conmigo!

Contenidos

Resumen **v**

Abstract **vii**

Dedicatoria **i**

Agradecimientos **iii**

1 Introducción **1**

2 Resultados previos y notación **9**
2.1 Análisis espectral 9
2.2 Notación matricial 14

3 Estabilización interna con un control escalar **17**
3.1 Estabilización interna de la ecuación de Kuramoto-Sivashinsky lineal 17
3.1.1 Diseño del control 19

4 Estabilización interna con un control saturado **23**
4.1 Estabilización en $L^2(0, L)$ 23
4.1.1 Descripción del problema 23
4.1.2 Diseño del control 23
4.1.3 Descomposición del sistema en cascada 25
4.1.4 Sobre la estabilidad del par $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ 29
4.1.5 Región de atracción y puntos fijos localmente estabilizables 32
4.1.6 Resultado principal 33
4.2 Estabilización en $H_0^2(0, L)$ 41
4.2.1 Lemas previos 42
4.2.2 Resultado principal 48

5 Conclusiones y trabajos futuros **49**

Bibliografía **51**

1 Introducción

La ecuación de Kuramoto-Sivashinsky es una ecuación parabólica no lineal de cuarto orden que en una dimensión espacial se puede escribir como

$$w_t + w_{xxxx} + \lambda w_{xx} + w w_x = 0,$$

donde $\lambda > 0$ es el coeficiente de anti-difusión. Esta ecuación fue presentada de manera independiente por Kuramoto y Tsuzuki [15] en el año 1975 como un modelo de turbulencias para fenómenos de reacción y difusión, mientras que en 1977, Sivashinsky [32] lo propone para modelar la propagación plana de llamas.

En este trabajo se busca contribuir a la literatura del problema de estabilización interna de la ecuación lineal, mediante controles de tipo feedback, en dos sentidos: El primero es para un control interno lineal, mientras que el segundo utiliza controles saturados, que son de naturaleza no lineal.

Debido a que la ecuación es de tipo parabólica, el argumento principal que usaremos para los dos problemas se sustenta en el análisis espectral del operador espacial asociado a la ecuación de Kuramoto-Sivashinsky lineal. Este desarrollo se conoce en la literatura como método de reducción espectral, o como método de descomposición modal. Típicamente, esta maquinaria se aplica sobre operadores de Sturm-Liouville para estabilizar los valores propios inestables del operador espacial junto con el método directo de Lyapunov. Esta estrategia se ha utilizado para obtener un resultado de estabilización para una ecuación de calor semilineal [13] y también en [11] para una ecuación de reacción difusión, en presencia de una perturbación distribuida a lo largo del dominio. Para ver más aplicaciones del método, se pueden consultar las referencias [7, 8, 18, 29].

En cuanto a la estabilización de la ecuación de Kuramoto-Sivashinsky, en [14] se estudia la ecuación lineal junto a condiciones de frontera

$$\begin{cases} w(t,0) = w(t,L) = 0, \\ w_{xx}(t,0) = w_{xx}(t,L) = 0, \end{cases}$$

de modo que el tratamiento como operador de Sturm-Liouville facilita los cálculos y las estimaciones para un funcional de Lyapunov asociado a la norma H^1, obteniendo un resultado de estabilización rápida para esta norma. En particular, dado un valor propio $\sigma \in \mathbb{R}$, queremos resolver el problema se Sturm-Liouville

$$\begin{cases} -w_{xxxx} - \lambda w_{xx} = \sigma w, \\ w(t,0) = w(t,L) = 0, \\ w_{xx}(t,0) = w_{xx}(t,L) = 0, \end{cases}$$

Observe que la ecuación característica asociada es

$$(D^4 + \lambda D^2 + \sigma) w = 0,$$

con soluciones

$$D_{1,2,3,4} = \pm \sqrt{\frac{-\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 - 4\sigma}}{2}}.$$

Procederemos por casos, en primer lugar suponga que $\sigma = 0$. Luego de la ecuación característica se sigue que

$$D_1 = D_2 = 0, \quad D_{3,4} = \pm\sqrt{\lambda}i,$$

por lo que la solución del problema es

$$w(x) = A + Bx + C\cos(\sqrt{\lambda}x) + D\sin(\sqrt{\lambda}x),$$

con segunda derivada

$$w''(x) = -\lambda\left(C\cos(\sqrt{\lambda}x) + D\sin(\sqrt{\lambda}x)\right).$$

Imponiendo las condiciones evaluadas en 0, obtenemos

$$w(0) = 0 \iff A + C = 0, \qquad w''(0) = 0 \iff C = 0.$$

Esto implica que $A = C = 0$. Utilizando estas constantes, se siguen del resto de condiciones de frontera que

$$w(L) = 0 \iff BL + D\sin(\sqrt{\lambda}L) = 0, \qquad w''(L) = D\sin(\sqrt{\lambda}L) = 0.$$

Observando que $\lambda > 0$ es un parámetro conocido, la segunda ecuación fuerza a que $D = 0$ y reemplazando esto en la primera ecuación, obtenemos que $B = 0$. Dado que estamos buscando soluciones no nulas para el problema de Sturm-Liouville, se sigue que $\sigma = 0$ no es un valor propio, pues su función propia asociada es 0.

Veamos ahora el caso $\sigma < 0$. Se sigue de los valores de $D_{1,2,3,4}$ que $\lambda^2 - 4\sigma > 0$, y por tanto,

$$-\lambda + \sqrt{\lambda^2 - 4\sigma} > 0, \qquad -\lambda - \sqrt{\lambda^2 - 4\sigma} < 0,$$

es decir, tenemos dos soluciones reales y dos complejas. Definamos los valores

$$\alpha = \sqrt{\frac{-\lambda + \sqrt{\lambda^2 - 4\sigma}}{2}}, \qquad \beta = \sqrt{\frac{\lambda + \sqrt{\lambda^2 - 4\sigma}}{2}},$$

luego las soluciones del sistema son de la forma

$$w(x) = A\cosh(\alpha x) + B\sinh(\alpha x) + C\cos(\beta x) + D\sin(\beta x),$$

y su segunda derivada es

$$w''(x) = \alpha^2\left[A\cosh(\alpha x) + B\sinh(\alpha x)\right] - \beta^2\left[C\cos(\beta x) + D\sin(\beta x)\right].$$

Imponiendo las condiciones evaluadas en 0, se sigue que

$$w(0) = 0 \iff A + C = 0, \quad w''(0) = 0 \iff A\alpha^2 - C\beta^2 = 0,$$

notemos que utilizando la primera ecuación, obtenemos que

$$A(\alpha^2 + \beta^2) = 0.$$

Utilizando las expresiones anteriores podemos observar que

$$\alpha^2 + \beta^2 = \sqrt{\lambda^2 - 4\sigma} \neq 0,$$

pues de lo contrario tendríamos que

$$\sqrt{\lambda^2 - 4\sigma} = 0 \iff \sigma = \frac{\lambda^2}{4} > 0,$$

pero en este caso tenemos que $\sigma < 0$. Se sigue que la expresión es no nula y por tanto $A = C = 0$. Utilizando esta información para las siguientes condiciones de frontera, se sigue

que

$$w(L) = 0 \iff B\sinh(\alpha L) + D\sin(\beta L) = 0, \;\; w''(L) = 0 \iff B\alpha^2\sinh(\alpha L) - D\beta^2\sin(\beta L) = 0.$$

Es decir, buscamos resolver el sistema

$$\begin{pmatrix} \sinh(\alpha L) & \sin(\beta L) \\ \alpha^2\sinh(\alpha L) & -\beta^2\sin(\beta L) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B \\ D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

tomando determinante, encontramos la condición

$$\sinh(\alpha L)\sin(\beta L)(-\alpha^2 - \beta^2) = 0.$$

Nos gustaría mostrar que, de hecho, esta condición se satisface solamente cuando $\sin(\beta L) = 0$. Observe que $\sinh(\alpha L) \neq 0$, pues $\alpha > 0$ y $L > 0$. Por otro lado, de un argumento anterior sabemos que $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$.

Esto implica que se tiene la condición $\sin(\beta L) = 0$. Dicho de otra forma,

$$\sin(\beta L) = 0 \iff \beta_k L = k\pi, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Al reemplazar este valor en $w(L) = 0$, se sigue que $B\sinh(\alpha L) = 0$. Sin embargo, notamos que $\sinh(\alpha L) = 0$ si y solamente si $\alpha L = 0$, lo que no se tiene. Esto fuerza a que $B = 0$ y por tanto las soluciones del sistema son

$$w_k(x) = D\sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right), \quad k \in \mathbb{N}.$$

Finalmente, revisamos el caso $\sigma > 0$. Supondremos en primer lugar que $\sigma < \frac{\lambda^2}{4}$. Observe que $-\lambda + \sqrt{\lambda^2 - 4\sigma} < 0$ y $-\lambda - \sqrt{\lambda^2 - 4\sigma} < 0$, por lo que en este caso tendremos cuatro soluciones complejas. Consideraremos

$$\alpha = \sqrt{\frac{\lambda - \sqrt{\lambda^2 - 4\sigma}}{2}}, \quad \beta = \sqrt{\frac{\lambda + \sqrt{\lambda^2 - 4\sigma}}{2}},$$

de modo que la solución del sistema viene dada por

$$w(x) = A\cos(\alpha x) + B\sin(\alpha x) + C\cos(\beta x) + D\sin(\beta x),$$

con segunda derivada,

$$w''(x) = -\alpha^2\left[A\cos(\alpha x) + B\sin(\alpha x)\right] - \beta^2\left[C\cos(\beta x) + D\sin(\beta x)\right].$$

Imponiendo las condiciones de frontera nulas, tenemos que

$$w(0) = 0 \iff A + C = 0, \quad w''(0) = 0 \iff -\alpha^2 A - \beta^2 C = 0,$$

del que deducimos que $A(\beta^2 - \alpha^2) = 0$. Notando que

$$\beta^2 - \alpha^2 = \sqrt{\lambda^2 - 4\sigma} \neq 0,$$

esto implica que $A = C = 0$. Utilizando esta información junto con el resto de condiciones de frontera, se sigue que

$$w(L) = 0 \iff B\sin(\alpha L) + D\sin(\beta L) = 0, \quad w''(L) = 0 \iff -\alpha^2 B\sin(\alpha L) - \beta^2 D\sin(\beta L) = 0,$$

al reemplazar la primera ecuación en la segunda, obtenemos la condición

$$D\sin(\beta L)(\beta^2 - \alpha^2) = 0.$$

Dado que buscamos soluciones no nulas y sabemos que $\beta^2 - \alpha^2 \neq 0$, se sigue que

$$\sin(\beta L) = 0 \iff \beta_k L = k\pi, \quad k \in \mathbb{N}.$$

De este modo, el reemplazar esta expresión en las últimas condiciones de frontera obtenemos

$$B\sin(\alpha L) = 0.$$

Afirmamos que sin pérdida de generalidad se tiene $B = 0$. En efecto, observe que si $B \neq 0$, se tendría que

$$\sin(\alpha L) = 0 \iff \alpha_n L = n\pi, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Utilizando las expresiones para α y β, podemos despejar las expresiones para σ_n y σ_k:

$$\alpha_n = \sqrt{\frac{\lambda - \sqrt{\lambda^2 - 4\sigma_n}}{2}} \quad \iff \quad \sigma_n = \frac{\lambda^2 - \left(\lambda - 2\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2\right)^2}{4},$$

y

$$\beta_k = \sqrt{\frac{\lambda + \sqrt{\lambda^2 - 4\sigma_k}}{2}} \quad \iff \quad \sigma_k = \frac{\lambda^2 - \left(2\left(\frac{k\pi}{L}\right)^2 - \lambda\right)^2}{4},$$

es decir, describen la misma sucesión de valores propios $\{\sigma_k\}_{k\in\mathbb{N}}$. Esto implica que las funciones propias asociadas tienen la misma fase, es decir, $n = k$ y por tanto

$$w_k(x) = B\sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right) + D\sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right) = \tilde{D}\sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right), \quad k \in \mathbb{N},$$

que es la misma expresión para las funciones propias si hubiésemos considerado $B = 0$.

Para el caso $\sigma = \frac{\lambda^2}{4}$, obtenemos de la ecuación característica que

$$D_{1,2,3,4} = \pm\sqrt{\frac{\lambda}{2}}i,$$

de modo que la solución del sistema viene dada por

$$w(x) = \cos(\alpha x)\left[A + Bx\right] + \sin(\alpha x)\left[C + Dx\right],$$

donde estamos usando $\alpha = \sqrt{\frac{\lambda}{2}}$. Se sigue que su segunda derivada viene dada por

$$w''(x) = -\alpha\left[(D\alpha x + C\alpha + 2B)\sin(\alpha x) + (B\alpha x + \alpha A - 2D)\cos(\alpha x)\right],$$

se sigue que

$$w(0) = 0 \iff A = 0, \quad w''(0) = 0 \iff -\alpha^2 A + 2\alpha D = 0,$$

de donde deducimos que $A = D = 0$. Para el otro extremo del intervalo tenemos las condiciones

$$\begin{cases} w(L) = 0 & \iff \quad \cos(\alpha L)BL + \sin(\alpha L)C = 0, \\ w''(L) = 0 & \iff \quad -\alpha\left[(C\alpha + 2B)\sin(\alpha L) + B\alpha L\cos(\alpha L)\right] = 0, \end{cases}$$

donde aplicamos $A = D = 0$. Notando que podemos factorizar la segunda ecuación como

$$-\alpha^2\left[\cos(\alpha L)BL + \sin(\alpha L)C\right] - 2B\alpha\sin(\alpha L) = 0,$$

se obtiene la siguiente expresión luego de reemplazar la primera ecuación en el resultado previo

$$2B\alpha\sin(\alpha L) = 0,$$

dado que buscamos soluciones no nulas y $\alpha \neq 0$, se sigue que

$$\sin(\alpha L) = 0 \iff \alpha_k L = k\pi, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Reemplazando esta información en la primera ecuación del sistema anterior, obtenemos que

$$BL\cos(\alpha_k L) = BL(-1)^k = 0,$$

de donde deducimos que $B = 0$ y que las funciones propias vienen dadas por

$$w_k(x) = C\sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right),$$

lo que concluye este caso.

El caso $\sigma > \frac{\lambda^2}{4}$ no es factible. Los argumentos utilizados para probar esto son análogos a los que se verán en 2.1 Análisis espectral para el operador

$$\begin{cases} B : \mathcal{D}(B) \subset L^2(0,L) \to L^2(0,L), \\ \mathcal{D}(B) = \{w \in L^2(0,L) :\ w'''' \in L^2(0,L),\ w(0) = w(L) = w''(0) = w''(L) = 0\}, \\ Bw = -w'''' - \lambda w''. \end{cases}$$

En particular, las condiciones de frontera son compatibles con la estimación realizada en la Proposición 2.1.7 que veremos más adelante.

Finalmente buscamos las funciones propias normalizadas. Es decir, que satisfacen

$$\int_0^L D^2\sin^2\left(\frac{k\pi}{L}x\right) = 1,$$

de donde encontramos el valor $D = \sqrt{\frac{2}{L}}$. De esta forma, las funciones propias no nulas para este problema de Sturm-Liouville son de la forma

$$w_k(x) = \sqrt{\frac{L}{2}}\sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right), \qquad k \in \mathbb{N}.$$

Esto muestra que para estas condiciones de frontera, las funciones propias no cambian dependiendo del signo de los valores propios. Además, tener las funciones propias explícitas puede ayudar a hacer estimaciones más precisas como se muestra en [14] y [16]. En este trabajo consideraremos el problema

$$\begin{cases} -w_{xxxx} - \lambda w_{xx} = \sigma w, \\ w(t,0) = w(t,L) = 0, \\ w_x(t,0) = w_x(t,L) = 0, \end{cases}$$

donde las funciones propias sí cambian dependiendo del signo del valor propio correspondiente, como se muestra en [5, Análisis espectral].

En [16] se estudia la ecuación de Kuramoto-Sivashinsky con las condiciones de frontera

$$\begin{cases} w(t,0) = u(t), \\ w(t,L) = w_{xx}(t,0) = w_{xx}(t,L) = 0, \end{cases}$$

además de considerar una observación del tipo

$$y(t) = w_x(t,L).$$

La dificultad de este caso es el control frontera. Para sobrepasar este obstáculo se utiliza una función de relevo para anular todas las condiciones de frontera. Con el nuevo sistema, podemos emplear el análisis del problema de Sturm-Liouville anterior. Utilizando herramientas de *Linear Matrix Inequalities* (LMI), en ese trabajo se alcanza un resultado de estabilización para la norma en H^2 incluyendo la no linealidad ww_x.

En este documento, objetivo es estudiar la ecuación lineal de Kuramoto-Sivashinsky con las condiciones de frontera

$$\begin{cases} w(t,0) = w(t,L) = 0, \\ w_x(t,0) = w_x(t,L) = 0, \end{cases}$$

que es una gran diferencia con respecto a los trabajos anteriores, pues si bien el análisis espectral del operador es análogo, la obtención explícita de los valores propios y funciones propias es mucho más compleja, como uno puede consultar en [5, Lema 2.1]. Aquí el argumento de reducción espectral juega un rol esencial, del cual buscaremos obtener un resultado de estabilización rápida para la norma L^2 a pesar de que no contaremos con expresiones explícitas para las funciones propias del operador.

En segunda instancia, introducimos controles saturados y gracias a técnicas de LMI, buscamos obtener un resultado de estabilización para las normas L^2 y H^2. El argumento de descomposición espectral sigue siendo esencial, además de algunas condiciones geométricas para la saturación, de modo que utilizando matrices aumentadas por bloques se pueda obtener la estabilidad deseada.

Durante el segundo problema, trabajaremos con la saturación puntual $\mathfrak{sat}(\cdot)$, que satisface

$$\mathfrak{sat}(u) = \begin{bmatrix} \mathfrak{sat}(u_1) \\ \vdots \\ \mathfrak{sat}(u_m) \end{bmatrix}, \qquad \forall u \in \mathbb{R}^m,$$

y considerando $\ell > 0$, tenemos para cada componente que

$$\mathfrak{sat}(u_k) = \mathfrak{sat}(u)_k := \begin{cases} u_k, & \text{si} \quad |u_k| \leq \ell, \\ \frac{\ell}{|u_k|} u_k, & \text{si} \quad |u_k| \geq \ell. \end{cases}$$

En la definición anterior, $\ell > 0$ es el nivel de saturación utilizado y se asumirá uniforme con respecto a cada una de las m componentes del vector. Una de las aplicaciones de los controles saturados es que logran modelar instrumentos de medición que se ven sobrepasados por alguna sobrecarga, como podría ser un termómetro enfrentándose a una temperatura que se escapa de su escala.

En general los sistemas físicos poseen entradas de valor finito, dígase fuerzas, torques, vibraciones o incluso impulsos. Esta particularidad motiva el problema de controlar o estabilizar un sistema en donde las cantidades físicas, o más precisamente, la norma de agentes que afectan al sistema, no puedan exceder cierto valor.

La dificultad de incluir saturaciones es que se trata de una no linealidad atípica en la que no hay una herramienta o método universal para trabajar. El autor utilizó como principal referencia el documento [34], en el que se hace un análisis exhaustivo de las propiedades y el manejo de las saturaciones. En particular, en este trabajo haremos uso de una no linealidad de tipo *deadzone* donde separaremos la saturación del control en la parte libre de saturación y en otra parte geométrica asociada a la región saturada.

Para trabajar la parte lineal tenemos toda la teoría de control lineal finita dimensional clásica, mientras que para la parte geométrica necesitamos una nueva clase de estimaciones. Concretamente, utilizaremos desigualdades lineales matriciales para estimar la región de atracción asociada a la saturación, donde el nuevo estado introducido en la no linealidad de tipo *deadzone* nos permitirá trabajar y estimar la matriz aumentada de estados para concluir la estabilización del sistema.

Considerando la ecuación lineal de Kuramoto-Sivashinsky, los objetivos específicos de este trabajo son:

1. Obtener un resultado de estabilización rápida en L^2 con un control interno.

2. Obtener resultados de estabilización para las normas L^2 y H^2 en presencia de un control saturado.

2 Resultados previos y notación

En este capítulo presentaremos algunos resultados y notaciones que utilizaremos a lo largo del documento.

2.1 Análisis espectral

En esta sección enunciaremos y demostraremos resultados importantes sobre el análisis espectral del operador espacial asociado a la ecuación de Kuramoto-Sivashinsky lineal con condiciones de frontera de tipo Dirichlet.

Considere el operador lineal no acotado

$$\begin{cases} A : \mathcal{D}(A) \subset L^2(0,L) \to L^2(0,L), \\ \mathcal{D}(A) = H^4(0,L) \cap H_0^2(0,L), \\ Aw = -w'''' - \lambda w''. \end{cases} \tag{2.1}$$

Probaremos que el operador definido en (2.1) es densamente definido, autoadjunto y que su operador resolvente es compacto.

Proposición 2.1.1. *El operador A definido en (2.1) es densamente definido, es decir,*

$$\overline{\mathcal{D}(A)} = L^2(0,L).$$

Demostración. Note en primer lugar que tenemos la contención

$$\mathcal{C}_0^\infty(0,L) \subset H^4(0,L) \cap H_0^2(0,L) = \mathcal{D}(A),$$

y que por [31, Teorema 7.1], se tiene que $\mathcal{C}_0^\infty$ es denso en $L^p(0,L)$ para $1 \leq p < \infty$, y en particular, en $L^2(0,L)$. Luego

$$\mathcal{C}_0^\infty(0,L) \subset \mathcal{D}(A) \subset L^2(0,L), \quad \wedge \quad \overline{\mathcal{C}_0^\infty(0,L)} = L^2(0,L),$$

de donde se concluye que $\overline{\mathcal{D}(A)} = L^2(0,L)$, por lo que el operador es densamente definido. □

Veamos ahora que el operador es autoadjunto. Dado que el operador es no acotado, tenemos la siguiente definición.

Definición 2.1.1. *(Operador adjunto de A, [3, Capítulo 2.6]) Sean E y F espacios de Hilbert y sea $A : \mathcal{D}(A) \subset E \to F$ un operador no acotado y densamente definido. Su operador adjunto $A^* : \mathcal{D}(A^*) \subset F^* \to E^*$ es tal que*

$$\mathcal{D}(A^*) = \left\{ v \in F^* \mid \exists c \geq 0 : \left| \langle v, Au \rangle_{F^*,F} \right| \leq c \left|\left| u \right|\right|_E, \forall u \in \mathcal{D}(A) \right\},$$

y que cumple

$$\langle v, Au \rangle_{F^*,F} = \langle A^* v, u \rangle_{E^*,E}, \qquad \forall u \in \mathcal{D}(A),\ \forall v \in \mathcal{D}(A^*).$$

Cuando el operador es no acotado, su operador adjunto podría no ser único. Veremos que la condición de que el operador sea densamente definido garantiza la existencia y unicidad del operador adjunto A^*.

Proposición 2.1.2. *([3, Capítulo 2.6]) Sean E y F espacios de Hilbert, y sea $A : \mathcal{D}(A) \subset E \to F$ un operador densamente definido. Entonces para todo $v \in \mathcal{D}(A^*)$, existe un único $A^*v \in E^*$.*

Demostración. Sea $v \in \mathcal{D}(A^*)$, por definición se sigue que existe una constante $c \geq 0$ tal que

$$\left|\langle v, Au\rangle_{F^*,F}\right| \leq c\,||u||_E\,, \quad \forall u \in \mathcal{D}(A).$$

Tomando $g : \mathcal{D}(A) \subset E \to \mathbb{R}$ como $g(u) = \langle v, Au\rangle_{F^*,F}$, se sigue por el Teorema de Hahn-Banach [3, Teorema 1.1] que existe un operador $f : E \to \mathbb{R}$ que extiende a g y que satisface

$$|f(u)| \leq c\,||u||_E\,, \qquad \forall u \in \mathcal{D}(A).$$

Definiremos $f := A^*v$, con $f \in E^*$. Observe que la extensión de g es única debido a que $\mathcal{D}(A)$ es denso en E, lo que garantiza la unicidad de $A^*v \in E^*$. □

Cuando hablemos de operadores no acotados que sean autoadjuntos, nos referimos a:

Definición 2.1.2. *(Operador autoadjunto, [21, Sección 3.2]) Sean E y F espacios de Hilbert, y sea $A : \mathcal{D}(A) \subset E \to F$ un operador no acotado y densamente definido. A se dice autoadjunto si satisface*

$$\langle v, Au\rangle_{F^*,F} = \langle A^*v, u\rangle_{E^*,E}\,, \qquad \forall u \in \mathcal{D}(A), v \in \mathcal{D}(A^*), \tag{2.2}$$

y que $\mathcal{D}(A) = \mathcal{D}(A^*)$.

Es decir, además de la simetría del operador (2.2), necesitamos que el dominio de A y de A^* coincidan. Con esto podemos probar el siguiente resultado, donde identificaremos a $L^2(0, L)$ con su espacio dual gracias a que es un espacio de Hilbert.

Proposición 2.1.3. *El operador A definido en (2.1) es autoadjunto.*

Demostración. Procederemos formalmente para ver cómo actúa A^* sobre los elementos de $E = F = L^2(0, L)$ y además, buscaremos las condiciones específicas que debe cumplir $\mathcal{D}(A^*)$ para garantizar que el operador sea autoadjunto.

Sean $\phi \in \mathcal{D}(A)$ y $\psi \in \mathcal{D}(A^*)$. Usando el producto interno en $L^2(0, L)$ e integraciones por parte, sigue que

$$\begin{aligned}
\langle A\phi, \psi\rangle_{L^2(0,L)} &= \int_0^L (-\phi'''' - \lambda\phi'')\psi dx \\
&= \Big[-\phi'''\psi - \lambda\phi'\psi + \phi''\psi' + \lambda\phi\psi' - \phi'\psi'' + \phi\psi'''\Big]\Big|_0^L + \int_0^L \phi(-\psi'''' - \lambda\psi'')dx \\
&= \Big[-\phi'''\psi - \lambda\phi'\psi + \phi''\psi' + \lambda\phi\psi' - \phi'\psi'' + \phi\psi'''\Big]\Big|_0^L + \langle \phi, A^*\psi\rangle_{L^2(0,L)}\,.
\end{aligned}$$

Por la definición de $\mathcal{D}(A)$, sigue que $\phi(0) = \phi(L) = \phi'(0) = \phi'(L) = 0$, por tanto

$$\langle A\phi, \psi\rangle_{L^2(0,L)} = \Big[-\phi'''\psi + \phi''\psi'\Big]\Big|_0^L + \langle \phi, A^*\psi\rangle_{L^2(0,L)}\,.$$

Debido a que utilizamos 4 integraciones por partes, obtenemos que $\psi \in H^4(0, L)$. Para lograr que las trazas se anulen, imponemos las condiciones

$$\psi(0) = \psi(L) = \psi'(0) = \psi'(L) = 0,$$

así, podemos considerar el dominio de A^* como

$$\mathcal{D}(A^*) = \{\psi \in H^4(0, L) \mid \psi(0) = \psi(L) = \psi'(0) = \psi'(L) = 0\},$$

de donde concluimos que

$$\mathcal{D}(A^*) = H^4(0, L) \cap H_0^2(0, L) = \mathcal{D}(A),$$

y

$$\langle \phi, A^*\psi \rangle_{L^2(0,L)} = \int_0^L \phi(-\psi'''' - \lambda\psi'')dx.$$

Notando que $\phi \in \mathcal{D}(A)$ es arbitrario y que $\mathcal{D}(A)$ es denso en $L^2(0,L)$ por la Proposición 2.1.1, obtenemos que $A^*\psi = -\psi'''' - \lambda\psi'' = A\psi$. Recopilando lo anterior, se sigue que el operador

$$\begin{cases} A^* : \mathcal{D}(A^*) \subset L^2(0,L) \to L^2(0,L), \\ \mathcal{D}(A^*) = H^4(0,L) \cap H_0^2(0,L), \\ A^*w = -w'''' - \lambda w'', \end{cases}$$

satisface que

$$\langle A\phi, \psi \rangle_{L^2(0,L)} = \langle \phi, A^*\psi \rangle_{L^2(0,L)}, \quad \forall \phi, \psi \in \mathcal{D}(A) = \mathcal{D}(A^*).$$

Por lo que A es un operador autoadjunto. □

Para ver que el operador A tiene resolvente compacto necesitamos los siguientes conjuntos.

Definición 2.1.3. *([3, Sección 6.1]) Dados E y F espacios de Hilbert, denotaremos por $\mathcal{LC}(E,F)$ al espacio de operadores lineales y continuos que van de E a F. Si $F = E$, denotaremos este espacio como $\mathcal{LC}(E)$.*

Definición 2.1.4. *([3, Sección 6.1]) Dados E y F espacios de Hilbert, un operador acotado $T \in \mathcal{LC}(E,F)$ se dice compacto si $T(B_E)$ tiene clausura compacta en F con la topología fuerte, donde B_E denota la bola unitaria en E.*

Definición 2.1.5. *(Conjunto resolvente de A, [3, Capítulo 6.3]) Dado $A \in \mathcal{LC}(E)$ con E un espacio de Hilbert. El conjunto resolvente de A se define como*

$$\rho(A) := \{\mu \in \mathbb{R} \ : \ (A - \mu I) \text{ sea biyectivo}\}.$$

Definición 2.1.6. *(Espectro de A, [3, Capítulo 6.3]) Sea $A \in \mathcal{LC}(E)$ con E un espacio de Hilbert. El espectro de A se define como*

$$\sigma(A) := \mathbb{R} \setminus \rho(A).$$

Usando que el operador A es autoadjunto se tienen las siguiente dos consecuencias importantes para estos conjuntos: que el conjunto resolvente es no vacío y que $\sigma(A) \subset \mathbb{R}$ [21, Proposición 3.2.6]. Así, podemos mostrar la siguiente proposición.

Proposición 2.1.4. *Sea A el operador definido en (2.1), entonces el operador resolvente $T^{-1} := (A - \alpha I)^{-1}$ es autoadjunto para todo $\alpha \in \rho(A)$.*

Demostración. En efecto, por [21, Proposición 2.8.4] se sigue que

$$\left[(A - \alpha I)^{-1}\right]^* = (A^* - \overline{\alpha} I)^{-1},$$

como A es autoadjunto por la Proposición 2.1.3 y que $\alpha \in \mathbb{R}$, se sigue $\alpha = \overline{\alpha}$, luego

$$\left[(A - \alpha I)^{-1}\right]^* = (A - \alpha I)^{-1},$$

lo que garantiza la simetría (2.2), y además que sus dominios coincidan:

$$\mathcal{D}\Big(\left[(A - \alpha I)^{-1}\right]^* \Big) = \mathcal{D}\Big((A - \alpha I)^{-1}\Big),$$

por tanto el operador resolvente es autoadjunto. □

Denotando por $\mathcal{K}(L^2(0,L), L^2(0,L)) = \mathcal{K}(L^2(0,L))$ el conjunto de operadores compactos que van de $L^2(0,L)$ a $L^2(0,L)$, nuestro siguiente paso es probar que A tiene operador resolvente compacto.

Proposición 2.1.5. *Sea A el operador definido en (2.1). Entonces para todo $\alpha \in \rho(A)$, el operador resolvente $(A - \alpha I)^{-1}$ es compacto, es decir, $(A - \alpha I)^{-1} \in \mathcal{K}(L^2(0,L))$.*

Demostración. Como A es autoadjunto, $\rho(A) \neq \emptyset$. Sea $\alpha \in \rho(A)$, entonces por la definición del operador A y que $I : \mathcal{D}(A) \to \mathcal{D}(A) \subset L^2(0,L)$, se tiene que

$$T := (A - \alpha I) \in \mathcal{LC}(\mathcal{D}(A), L^2(0,L)).$$

Luego como $\alpha \in \rho(A)$, se sigue que T es biyectivo. Usando además que $\mathcal{D}(A)$ y $L^2(0,L)$ son espacios de Hilbert, podemos invocar [3, Corolario 2.7] para obtener

$$T^{-1} \in \mathcal{LC}(L^2(0,L), \mathcal{D}(A)). \tag{2.3}$$

Si probamos que (2.3) es compacto, concluimos que A posee resolvente compacto. Por el Teorema de Rellich-Kondrachov [3, Teorema 9.16], el operador inclusión

$$j : H_0^2(0,L) \hookrightarrow L^2(0,L),$$

es una inyección compacta, es decir, $j \in \mathcal{K}(H_0^2(0,L), L^2(0,L))$. Luego usando [3, Proposición 6.3] con los operadores

$$T^{-1} \in \mathcal{LC}(L^2(0,L), \mathcal{D}(A)) \quad \wedge \quad j \in \mathcal{K}(H_0^2(0,L), L^2(0,L)),$$

obtenemos que $(j \circ T^{-1}) \in \mathcal{K}(L^2(0,L))$. Abusaremos de notación y denotaremos por $T^{-1} := j \circ T^{-1} \in \mathcal{K}(L^2(0,L))$, de donde se sigue que A tiene operador resolvente compacto por la arbitrariedad de $\alpha \in \rho(A)$. □

De las Proposiciones 2.1.4 y 2.1.5 tenemos que T^{-1} es un operador autoadjunto y compacto en $L^2(0,L)$. Dado que este último es un espacio de Hilbert separable y denotando por $EV(T^{-1})$ al conjunto de los valores propios asociados al operador T^{-1}, se sigue por [31, Teorema 6.15] que

1. $0 \in \sigma(T^{-1})$ y $\sigma(T^{-1}) \setminus \{0\} = EV(T^{-1}) \setminus \{0\}$.
2. Existe una base ortonormal de Hilbert-Schmidt dada por $\{e_j\}_{j\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{D}(A)$ que son funciones propias asociadas al operador T^{-1}.
3. Dado que la dimensión de $L^2(0,L)$ es infinita, los valores propios no nulos $\{\mu_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ asociados al operador T^{-1} se pueden reordenar de manera decreciente en valor absoluto. Es decir,
$$|\mu_j| \geq |\mu_{j+1}|,$$
y además,
$$\lim_{j\to\infty} \mu_j = 0.$$

De este resultado destacamos que los valores propios asociados al operador A serán inversamente proporcionales a μ_j como veremos a continuación. De la demostración de la Proposición 2.1.5, tenemos que T^{-1} es un operador biyectivo y por tanto

$$\mathrm{Ker}(T^{-1}) = \{0\},$$

lo que implica que $\mu_j \neq 0$. Con esto, podemos probar el siguiente resultado.

Proposición 2.1.6. *Considere el operador A definido en (2.1), entonces $\{e_j\}_{j\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{D}(A)$ es una base de funciones propias asociadas a A y sus valores propios $\{\sigma_j\}_{j\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ vienen dados por*

$$\sigma_j = \alpha + \frac{1}{\mu_j}, \quad \forall j \in \mathbb{N},$$

donde $\{\mu_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ son los valores propios asociados al operador $(A - \alpha I)^{-1}$ con $\alpha \in \rho(A)$.

Demostración. En virtud del [31, Teorema 6.15], tenemos que $\{e_j\}_{j\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{D}(A)$ y $\{\mu_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ son funciones y valores propios asociados a $(A - \alpha I)^{-1}$. Dado que $(A - \alpha I)^{-1}$ es biyectivo para

$\alpha \in \rho(A)$ y que $\mu_j \neq 0$ para $j \in \mathbb{N}$, se sigue que

$$\begin{aligned}(A-\alpha I)^{-1}e_j &= \mu_j e_j \\ \frac{1}{\mu_j}e_j &= (A-\alpha I)e_j \\ \left(\alpha + \frac{1}{\mu_j}\right)e_j &= Ae_j,\end{aligned}$$

de este modo, $\{e_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ es también una base ortonormal para A. Además, los valores propios de A vienen determinados por

$$\sigma_j = \alpha + \frac{1}{\mu_j}, \qquad \forall j \in \mathbb{N}.$$

□

Observación 2.1.1. *En la proposición anterior afirmamos que, de hecho, σ_j no depende de α para ningún $j \in \mathbb{N}$. La razón detrás de esto, a pesar de que en la ecuación uno visualiza explícitamente la dependencia de α, es que del despeje de la ecuación uno deduce que*

$$\mu_j = \frac{1}{\sigma_j - \alpha}, \qquad \alpha \neq \sigma_j, \quad \forall j \in \mathbb{N},$$

de modo que obtenemos restricciones para $\alpha \in \rho(A)$ y además, al reemplazar esto en la ecuación se sigue que la expresión μ_j elimina la dependencia de α para σ_j.

De momento no tenemos conocimiento sobre los signos de los valores propios asociados a T^{-1}, y por tanto, tampoco de los valores propios asociados a A. El siguiente resultado de [5, 2. Análisis espectral] nos ayudará a determinar esta información.

Proposición 2.1.7. *Sean $\{\sigma_j\}_{j\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ los valores propios asociados al operador A definido en (2.1). Entonces, el operador A es acotado superiormente y se cumple que*

$$\sigma_j \leq \frac{\lambda^2}{4}, \qquad \forall j \in \mathbb{N}. \tag{2.4}$$

Demostración. Sea e_j una función propia de A y σ_j su valor propio asociado, entonces dado que $e_j'' \in L^2(0,L)$ y $e_j \in L^2(0,L)$, se tiene por la desigualdad de Hölder [3, Teorema 4.6]:

$$\begin{aligned}\sigma_j \int_0^L |e_j|^2 dx &= \langle Ae_j, e_j\rangle_{L^2(0,L)} \\ &= -\int_0^L |e_j''|^2 dx - \lambda \int_0^L e_j'' e_j dx \\ &\leq -\int_0^L |e_j''|^2 dx + \lambda \left(\int_0^L |e_j''|^2 dx\right)^{1/2} \left(\int_0^L |e_j|^2 dx\right)^{1/2} \\ &= -\left|\left|e_j''\right|\right|^2_{L^2(0,L)} + \lambda \left|\left|e_j''\right|\right|_{L^2(0,L)} ||e_j||_{L^2(0,L)},\end{aligned}$$

luego, usando que $\lambda > 0$, podemos usar la desigualdad

$$ab \leq \frac{a^2}{\lambda} + \frac{\lambda b^2}{4},$$

con $a = \left|\left|e_j''\right|\right|_{L^2(0,L)}$ y $b = ||e_j||_{L^2(0,L)}$ para obtener que

$$\begin{aligned}\langle Ae_j, e_j\rangle_{L^2(0,L)} &\leq -\left|\left|e_j''\right|\right|^2_{L^2(0,L)} + \lambda \left|\left|e_j''\right|\right|_{L^2(0,L)} ||e_j||_{L^2(0,L)} \\ &\leq -\left|\left|e_j''\right|\right|^2_{L^2(0,L)} + \lambda\left[\frac{\left|\left|e_j''\right|\right|^2_{L^2(0,L)}}{\lambda} + \frac{\lambda\,||e_j||^2_{L^2(0,L)}}{4}\right] \\ &= \frac{\lambda^2}{4}\int_0^L |e_j|^2 dx.\end{aligned}$$

Lo que concluye que $\sigma_j \leq \frac{\lambda^2}{4}$ para todo $j \in \mathbb{N}$, pues tenemos

$$\langle Ae_j, e_j\rangle_{L^2(0,L)} = \sigma_j\,||e_j||^2_{L^2(0,L)} \leq \frac{\lambda^2}{4}\,||e_j||^2_{L^2(0,L)}\,.$$

Que además muestra que A es un operador acotado. □

Por el desarrollo anterior tenemos que A es un operador autoadjunto, con resolvente compacto y tal que sus valores propios están acotados superiormente. Luego por el Teorema de Courant-Fischer [21, Proposición 3.2.13] se sigue que los valores propios del operador A, denotados por $\{\sigma_j\}_{j\in\mathbb{N}}$, se pueden reordenar de manera decreciente para que cumplan

$$\begin{cases}\sigma_j \geq \sigma_{j+1}, \\ \sigma_j \to -\infty, \quad \text{cuando} \quad j \to \infty.\end{cases} \tag{2.5}$$

Por tanto, dado que se tiene (2.4) y que la sucesión es decreciente, existe una cantidad finita de valores propios $\{\sigma_j\}_{j=1}^n$ que serán no negativos.

2.2 Notación matricial

Los resultados de esta sección vienen de [2, Notación].

A lo largo de este trabajo, identificaremos las matrices $M_{m\times n}$ con $\mathbb{R}^{m\times n}$ bajo un isomorfismo algebraico, garantizado por la igualdad de dimensiones entre los dos espacios. Cuando hablemos de matrices, las denotaremos como

$$\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}, \quad \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n\times m},$$

y para la matriz identidad usaremos

$$\mathbf{I}_n \in \mathbb{R}^{n\times n}.$$

Denotaremos por $\mathbb{S}^n$ el espacio de matrices simétricas de $n \times n$. Si $\mathbf{A} \in \mathbb{S}^n$, entonces es diagonalizable ortogonalmente y ordenamos sus valores propios de manera decreciente

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq ... \geq \lambda_n,$$

de donde se tienen las siguientes igualdades

$$\det \mathbf{A} = \prod_{k=1}^n \lambda_k, \qquad \operatorname{tr} \mathbf{A} = \sum_{k=1}^n \lambda_k.$$

Equiparemos a $\mathbb{S}^n$ con la norma de Frobenius,

$$||\mathbf{A}|| = \left(\sum_{k=1}^n \lambda_k^2\right)^{1/2}.$$

Cuando hablemos de elementos $x \in \mathbb{R}^n$, consideraremos la norma euclideana que denotaremos por $|\cdot|$. En tal caso, tenemos las siguientes expresiones para λ_1 y λ_n respectivamente

$$\lambda_1 = \sup_{x \neq 0} \frac{x^\top \mathbf{A} x}{|x|^2}, \qquad \lambda_n = \inf_{x \neq 0} \frac{x^\top \mathbf{A} x}{|x|^2}.$$

En particular, se satisfacen las siguientes desigualdades

$$\lambda_n |x|^2 \leq x^\top \mathbf{A} x \leq \lambda_1 |x|^2, \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Una matriz $\mathbf{A} \in \mathbb{S}^n$ se dice semidefinida positiva si satisface

$$x^\top \mathbf{A} x \geq 0, \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Dadas $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{S}^n$, usaremos el orden parcial de Loewner [28, Sección 1.10] para escribir

$$\mathbf{A} \succeq \mathbf{B} \quad \Longleftrightarrow \quad \mathbf{A} - \mathbf{B} \succeq 0.$$

que es equivalente a pedir que los valores propios de $\mathbf{A} - \mathbf{B}$ sean no negativos. Si $A \in \mathbb{S}^n$ es semidefinida positiva, lo denotaremos por $\mathbf{A} \succeq 0$.

Diremos que $\mathbf{A} \in \mathbb{S}^n$ es definida positiva si satisface

$$x^\top \mathbf{A} x > 0, \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}.$$

Considerando $\mathbf{B} \in \mathbf{S}^n$ definida positiva, tendremos

$$\mathbf{A} \succ \mathbf{B} \quad \Longleftrightarrow \quad \mathbf{A} - \mathbf{B} \succ 0,$$

Diremos que una matriz $\mathbf{A}$ es Hurwitz si todos sus valores propios tienen parte real negativa.

3 Estabilización interna con un control escalar

3.1 Estabilización interna de la ecuación de Kuramoto-Sivashinsky lineal

En esta sección estudiaremos el siguiente sistema de control asociado a la ecuación de Kuramoto-Sivashinsky lineal con condiciones Dirichlet

$$\begin{cases} w_t + w_{xxxx} + \lambda w_{xx} = u, & (t,x) \in (0,+\infty) \times (0,L), \\ w(t,0) = w(t,L) = 0, & t \in (0,+\infty), \\ w_x(t,0) = w_x(t,L) = 0, & t \in (0,+\infty), \\ w(0,x) = w_0(x), & x \in (0,L). \end{cases} \tag{3.1}$$

Donde $w_0 \in L^2(0,L)$ y $u \in L^2((0,+\infty), L^2(0,L))$. El objetivo es adaptar los argumentos presentados en [11] para una ecuación de reacción difusión y obtener el siguiente resultado de estabilización rápida de la norma en $L^2(0,L)$ para soluciones de (3.1):

Teorema 3.1.1 (Decaimiento exponencial de $||\cdot||_{L^2(0,L)}$)**.** *Sea $w_0 \in L^2(0,L)$ y sea $\omega > 0$. Entonces existe $n \in \mathbb{N}$ y un control feedback de la forma*

$$u(t,x) = \sum_{j=1}^{n} (-\omega - \sigma_j) w_j(t) e_j(x),$$

que estabiliza exponencialmente el sistema (3.1) con tasa de decaimiento ω, donde $\{\sigma_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ y $\{e_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ son los valores y funciones propias del operador espacial de (3.1). Es decir, se satisface la siguiente desigualdad

$$||w(t,\cdot)||_{L^2(0,L)} \leq e^{-\omega t} ||w_0||_{L^2(0,L)}, \qquad t \geq 0.$$

El argumento que utilizaremos se sustenta en el análisis espectral del operador espacial de la ecuación de Kuramoto-Sivashinsky lineal definido en (2.1). Con tal notación, podemos reescribir nuestro sistema como

$$\begin{cases} w_t = Aw + u, & (t,x) \in (0,+\infty) \times (0,L), \\ w(0,x) = w_0(x), & x \in (0,L). \end{cases}$$

De la Sección 2.1, sabemos que A es un operador autoadjunto, con resolvente compacto y acotado superiormente en un espacio de Hilbert separable, por lo que admite una base ortonormal $\{e_j\}_{j\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{D}(A)$ con valores propios dados por $\{\sigma_j\}_{j\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$.

La principal dificultad del problema que estamos estudiando, es que existe una cantidad finita $m \in \mathbb{N}$ de valores propios no negativos de modo que tenemos

$$\begin{cases} \sigma_j \geq 0, & j \leq m, \\ \sigma_j < 0, & j \geq m+1. \end{cases} \tag{3.2}$$

Estos valores propios son los que desestabilizan el sistema (3.1), por lo que si logramos construir un control que estabilice estos valores propios, entonces podremos concluir el resultado

del Teorema 3.1.1.

Sea $\omega \in (0, +\infty)$ y considere $n \in \mathbb{N}$ la cantidad de valores propios no negativos y de decrecimiento lento tal que

$$0 < \omega < -\sigma_j, \qquad \forall j \geq n+1. \tag{3.3}$$

El valor $\omega > 0$ será la posterior tasa de decaimiento exponencial. La idea detrás del argumento es, dada una tasa de decaimiento arbitraria, podemos estabilizar los valores propios no negativos y, además, los valores propios negativos que decrecen a una tasa menor que el $\omega > 0$ seleccionado, acelerando su proceso de estabilización. Por esto último, este resultado se puede encontrar en la literatura como estabilización rápida.
Sea w solución del sistema (3.1), se sigue de la base ortonormal que podemos expandir las soluciones como

$$w(t,x) = \sum_{j=1}^{\infty} w_j(t) e_j(x), \tag{3.4}$$

donde $w_j(t)$ denotan los coeficientes de Fourier que vienen dados por

$$w_j(t) = \langle w(t,\cdot), e_j(\cdot) \rangle_{L^2(0,L)}.$$

De manera análoga, podemos expandir el control u en términos de la base ortonormal

$$u(t,x) = \sum_{j=1}^{n} G_j(t) e_j(x), \tag{3.5}$$

donde $G_j(t)$ denotan las ganancias asociadas al control. El nombre asignado se justifica porque estos valores serán las ganancias que necesita el control componente a componente para lograr estabilizar cada uno de los n valores propios no negativos y de decaimiento lento presentados en (3.3).

Considere el funcional de energía dado por

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_0^L |w|^2 dx, \tag{3.6}$$

luego por el análisis espectral de la Sección 2.1, podemos reescribir esta integral en término de la base ortonormal para obtener que

$$\begin{aligned} E(t) &= \frac{1}{2} \int_0^L |w|^2 dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^L \left(\sum_{j=1}^{\infty} w_j(t) e_j(x) \right) \left(\sum_{k=1}^{\infty} w_k(t) e_k(x) \right) dx \\ &= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} w_j(t) w_k(t) \langle e_j, e_k \rangle_{L^2(0,L)}. \end{aligned}$$

Dado que la ortonormalidad de la base $\{e_j\}_{j\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{D}(A)$ nos dice que

$$\langle e_j, e_k \rangle_{L^2(0,L)} = \delta_{jk} = \begin{cases} 1, & j = k, \\ 0, & j \neq k. \end{cases}$$

Se sigue que

$$\begin{aligned} E(t) &= \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} w_j(t)w_k(t)\left\langle e_j, e_k\right\rangle_{L^2(0,L)} \\ &= \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} w_j(t)w_k(t)\delta_{jk} \\ &= \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{\infty} w_j^2(t). \end{aligned}$$

Con esta expresión en mente, es que buscaremos probar el decaimiento exponencial de $E(t)$. Observe que derivando el funcional con respecto a t, y utilizando que w resuelve la ecuación (3.1), se sigue que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\int_0^L |w|^2 dx\right) &= \int_0^L w w_t dx \\ &= \int_0^L w(u - w_{xxxx} - \lambda w_{xx})dx, \end{aligned}$$

siendo la última ecuación análoga a

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\int_0^L |w|^2 dx\right) + \int_0^L -w(u - w_{xxxx} - \lambda w_{xx})dx = 0. \tag{3.7}$$

El objetivo de este desarrollo, es construir un control u que permita probar gracias al análisis espectral de (2.1) que se cumple la siguiente estimación

$$\int_0^L -w(u - w_{xxxx} - \lambda w_{xx})dx = \int_0^L -w(Aw + u)dx \geq \omega \int_0^L |w|^2 dx = 2\omega E(t),$$

en tal caso, de la ecuación (3.7) se desprende que

$$\dot{E}(t) + 2\omega E(t) \leq 0 \Longrightarrow E(t) \leq e^{-2\omega t}E(0),$$

que es justamente el decaimiento exponencial buscado en el Teorema 3.1.1.

3.1.1 Diseño del control

En esta sección buscaremos la relación que deben satisfacer las ganancias $G_j(t)$ asociadas al control u para asegurar el decaimiento exponencial de $E(t)$.

Utilizando la expansión (3.4) de las soluciones de (3.1), sigue de

$$Ae_j = \sigma_j e_j, \qquad \forall j \in \mathbb{N},$$

junto con la linealidad de A que

$$\begin{aligned} Aw(t,x) &= \sum_{j=1}^{\infty} w_j(t)Ae_j(x), \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \sigma_j w_j(t)e_j(x), \end{aligned}$$

así, utilizando esta expresión podemos reescribir la integral que queremos estimar como

$$\begin{aligned}\int_0^L -w(u - w_{xxxx} - \lambda w_{xx})dx &= \int_0^L -w(Aw + u)dx \\ &= \int_0^L \left(-\sum_{j=1}^{\infty} w_j(t)e_j(x)\right)\left(\sum_{k=1}^{\infty}\sigma_k w_k(t)e_k(x) + \sum_{k=1}^{n} G_k(t)e_k(x)\right)dx \\ &= \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} -\sigma_k(t)w_j(t)w_k(t)\left\langle e_j, e_k\right\rangle_{L^2(0,L)} \\ &\quad + \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{n} -w_j(t)G_k(t)\left\langle e_j, e_k\right\rangle_{L^2(0,L)}.\end{aligned}$$

Esta expresión aún es compleja de utilizar. Buscaremos que los índices de las sumatorias dobles coincidan para poder explotar nuevamente la ortonormalidad de la familia $\{e_j\}_{j\in\mathbb{N}}$,

$$\begin{aligned}\int_0^L -w(u - w_{xxxx} - \lambda w_{xx})dx &= \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} -\sigma_k w_j(t)w_k(t)\delta_{jk} + \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{n} -w_j(t)G_k(t)\delta_{jk} \\ &= \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} -\sigma_k w_j(t)w_k(t)\delta_{jk} + \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} -w_j(t)G_k(t)\delta_{jk} \\ &\quad + \sum_{j=n+1}^{\infty}\sum_{k=1}^{n} -w_j(t)G_k(t)\delta_{jk} \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} -\sigma_j w_j^2(t) + \sum_{j=1}^{n} -w_j(t)G_j(t) \\ &= \sum_{j=n+1}^{\infty} -\sigma_j w_j^2(t) + \sum_{j=1}^{n}\left(-\sigma_j w_j^2(t) - w_j(t)G_j(t)\right).\end{aligned}$$

La idea de dejar esta igualdad expresada de esta forma, es que podemos explotar el comportamiento de los valores propios $\{\sigma_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ descrito en (3.3) para trabajar cada suma por separado. Note de esto último que cuando $j \geq n+1$, se sigue que

$$\sum_{j=n+1}^{\infty} -\sigma_j w_j^2(t) \geq \omega \sum_{j=n+1}^{\infty} w_j^2(t). \tag{3.8}$$

Por otro lado, cuando $j \leq n$ nos gustaría obtener que

$$\sum_{j=1}^{n} -\sigma_j w_j^2(t) - w_j(t)G_j(t) = \omega \sum_{j=1}^{n} w_j^2(t),$$

de modo que podamos completar la serie correspondiente a la norma en $L^2(0,L)$. Dado que el control queda determinado completamente por la expresión de las ganancias $G_j(t)$, obtenemos gracias a la expansión en la base ortonormal las ecuaciones

$$-\sigma_j w_j(t) - G_j(t) = \omega w_j(t), \qquad \forall j \in \{1, ..., n\},$$

concluyendo que

$$G_j(t) = -(\omega + \sigma_j)w_j(t), \qquad \forall j \in \{1, ..., n\}. \tag{3.9}$$

Así, en virtud de (3.8) y (3.9), obtenemos que el control dado por

$$u(t,x) = \sum_{j=1}^{n}(-\omega - \sigma_j)w_j(t)e_j(x), \tag{3.10}$$

satisface que

$$\begin{aligned}\int_0^L -w(Aw+u)dx &= \sum_{j=n+1}^{\infty} -\sigma_j w_j^2(t) + \sum_{j=1}^{n} -\sigma_j w_j^2(t) - w_j(t)G_j(t)\\ &\geq \omega\sum_{j=1}^{n} w_j^2(t) + \omega\sum_{j=n+1}^{\infty} w_j^2(t) = \omega\sum_{j=1}^{\infty} w_j(t)^2\\ &= 2\omega E(t).\end{aligned}$$

Con estos desarrollos ya podemos probar el Teorema 3.1.1, como mostramos a continuación.

Demostración. Sea w solución de (3.1) con $w_0 \in L^2(0,L)$. Considere ω que cumpla (3.3) donde $\{\sigma_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ son los valores propios asociados al operador A definido en (2.1).

Si denotamos por $\{e_j\}_{j\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{D}(A)$ la base ortonormal asociado al operador A, entonces podemos tomar el control dado por (3.10) para obtener que

$$\begin{aligned}0 &= \dot{E}(t) + \int_0^L -w(u - w_{xxxx} - \lambda w_{xx})dx\\ &= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\int_0^L |w|^2 dx\right) + \int_0^L -w(u - w_{xxxx} - \lambda w_{xx})dx\\ &\geq \dot{E}(t) + 2\omega E(t),\end{aligned}$$

donde utilizamos las estimaciones (3.8) y (3.9). Por tanto, se satisface que

$$E(t) \leq e^{-2\omega t}E(0), \qquad \forall t \geq 0.$$

Finalmente, de (3.6) se concluye que

$$||w||_{L^2(0,L)} \leq e^{-\omega t}\,||w_0||_{L^2(0,L)}\,, \qquad \forall t \geq 0.$$

Lo que prueba el resultado. □

Cerramos esta sección comentando algunas observaciones importantes sobre el problema.

En primer lugar, el sistema infinito dimensional generado por la expansión en términos de Fourier se puede separar en dos subsistemas completamente desacoplados: un subsistema finito dimensional inestable y un subsistema infinito dimensional inestable. Como se puede consultar en [12], la linealidad del sistema completo dice que si logramos estabilizar el subsistema finito dimensional, entonces se concluye la estabilidad para todo el sistema, pues el otro subsistema ya era estable.

La estabilidad del subsistema infinito dimensional ocurre en (3.8) y, como podríamos esperar por el signo de sus valores propios, no debería requerir tanto trabajo. Para el subsistema finito dimensional, la ingeniosa descomposición del control nos permite escoger las ganancias justas para asegurar la estabilidad del subsistema. Este es otro punto importante del desarrollo: el control es tremendamente explícito y no pide ni más ni menos de lo que necesita para estabilizar el sistema completo.

La segunda observación es que para este desarrollo pareciera que no precisamos de un resultado de controlabilidad para el sistema finito dimensional. En la discusión del siguiente problema veremos cómo este argumento esconde la controlabilidad del sistema gracias a una apropiada escritura del sistema finito dimensional.

4 Estabilización interna con un control saturado

4.1 Estabilización en $L^2(0, L)$

En esta sección el objetivo es estabilizar el sistema asociado a la ecuación de Kuramoto-Sivashinsky lineal con condiciones de Dirichlet que incluya un control saturado, adaptando los argumentos presentados en [24].

4.1.1 Descripción del problema

Dado $L > 0$, consideraremos un control $u : (0, +\infty) \to \mathbb{R}^m$ dado por

$$u(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ \vdots \\ u_m(t) \end{bmatrix}$$

y el vector

$$\mathbf{b}(x) = (b_1, ..., b_m)$$

donde $b_k : [0, L] \to \mathbb{R}$ son las funciones que describen en qué lugar de $[0, L]$ actúa la componente $u_k \in \mathbb{R}$ del control, también llamadas localizaciones y satisfacen que $b_k \in L^2(0, L)$. En esta sección estudiaremos la estabilización del siguiente sistema

$$\begin{cases} w_t(t,x) = -w_{xxxx}(t,x) - \lambda w_{xx}(t,x) + \displaystyle\sum_{k=1}^{m} b_k(x)\mathfrak{sat}(u_k(t)), & (t,x) \in (0,+\infty) \times (0,L), \\ w(t,0) = w(t,L) = 0, & t \in (0,+\infty), \\ w_x(t,0) = w_x(t,L) = 0, & t \in (0,+\infty), \\ w(0,x) = w_0(x), & x \in (0,L). \end{cases} \tag{4.1}$$

En donde denotamos por $\mathfrak{sat}(\cdot)$ a la saturación puntual, que satisface

$$\mathfrak{sat}(u) = \begin{bmatrix} \mathfrak{sat}(u_1) \\ \vdots \\ \mathfrak{sat}(u_m) \end{bmatrix}, \qquad \forall u \in \mathbb{R}^m,$$

y considerando $\ell > 0$, se tiene

$$\mathfrak{sat}(u_k) = \mathfrak{sat}(u)_k := \begin{cases} u_k, & \text{si } |u_k| \leq \ell, \\ \frac{\ell}{|u_k|} u_k, & \text{si } |u_k| \geq \ell. \end{cases}$$

En la definición anterior, $\ell > 0$ es el nivel de saturación utilizado y se asumirá uniforme con respecto a cada una de las m componentes del vector.

4.1.2 Diseño del control

Para estabilizar el sistema (4.1) notamos que el operador espacial es nuevamente el que describimos en (2.1). Con esto en mente, podemos reutilizar el análisis espectral desarrollado

en la Sección 2.1 que, por completitud, resumimos a continuación.

Denotando nuevamente por A el operador espacial asociado a (4.1), podemos reescribir la ecuación del sistema como

$$w_t(t,\cdot) = Aw(t,\cdot) + \sum_{k=1}^{m} b_k \,\mathfrak{sat}(u_k(t)),$$

donde A es un operador autoadjunto, con resolvente compacto y acotado superiormente. Entonces, dado que $L^2(0,L)$ es un espacio de Hilbert separable, existe una base de Hilbert $\{e_j\}_{j\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{D}(A)$ de funciones propias de A, que tienen asociados los valores propios $\{\sigma_j\}_{j\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$. En particular, podemos reordenar sus valores propios de manera decreciente:

$$\begin{cases} \sigma_j \geq \sigma_{j+1}, & \forall j \in \mathbb{N}, \\ \lim\limits_{j\to\infty} \sigma_j = -\infty. \end{cases}$$

Nuevamente el punto importante de este desarrollo es que existen finitos valores propios no negativos que desestabilizan el sistema, por lo que el objetivo es lograr estabilizar este subsistema.

En virtud de la base ortonormal $\{e_j\}_{j\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{D}(A)$, podemos utilizar nuevamente la expansión (3.4)

$$w(t,\cdot) = \sum_{j=1}^{\infty} w_j(t) e_j(\cdot),$$

donde $w_j(t)$ son los coeficientes de Fourier dados por (3.1). Una observación importante sobre esto último es que dado que la base es ortonormal, cada e_j tiene asignado un único coeficiente.

Dado que los términos b_k dependen de la variable espacial, también los podemos expandir en términos de $\{e_j\}_{j\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{D}(A)$. El resultado será que para cada $j \in \mathbb{N}$, tendremos m componentes asociados a la localización,

$$\begin{aligned} b_k(x) &= \sum_{j=1}^{\infty} \langle b_k, e_j \rangle_{L^2(0,L)} \, e_j(x) \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} b_{jk} e_j(x), \qquad \forall k \in \{1,...,m\}, \end{aligned}$$

donde denotaremos por

$$b_{jk} = \langle b_k, e_j \rangle_{L^2(0,L)}, \qquad \forall j \in \mathbb{N}, \quad \forall k \in \{1,...,m\},$$

a los elementos de la matriz de coeficientes que resulta de expandir los términos b_k con $k \in \{1,...,m\}$ con respecto a la base ortonormal $\{e_j\}_{j\in\mathbb{N}}$.

De este modo, utilizando la relación

$$Ae_j = \sigma_j e_j,$$

se tiene la ecuación

$$\sum_{j=1}^{\infty} \dot{w}_j(t) e_j(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \sigma_j w_j(t) e_j(x) + \sum_{k=1}^{m} \sum_{j=1}^{\infty} b_{jk} e_j(x) \mathfrak{sat}(u_k(t)).$$

Reagrupando términos, obtenemos la siguiente expresión

$$\sum_{j=1}^{\infty} \dot{w}_j(t) e_j(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \left(\sigma_j w_j(t) + \sum_{k=1}^{m} b_{jk} \mathfrak{sat}(u_k(t)) \right) e_j(x),$$

por tanto, usando la base ortonormal tenemos que el sistema de ecuaciones componente a componente es

$$\dot{w}_j(t) = \sigma_j w_j(t) + \mathbf{b}_j \cdot \mathfrak{sat}(u(t)), \qquad \forall j \in \mathbb{N}, \tag{4.2}$$

donde usaremos que $\mathbf{b}_j = (b_{j1}, ..., b_{jm}) \in \mathbb{R}^{1\times m}$ para cada $j \in \mathbb{N}$.

Observación 4.1.1. *A diferencia del sistema que estudiamos en la Sección 3, aquí el control actúa sobre todos los valores propios del sistema. Este fenómeno es debido a que la saturación es un tipo de no linealidad, y estas últimas generan un acoplamiento entre el subsistema finito dimensional inestable y el subsistema infinito dimensional estable. Esto justifica, como veremos a continuación, que el sistema se denomine en* cascada.

Sea $n \in \mathbb{N}$ la cantidad de valores propios no negativos, y sea $\eta \in (0, +\infty)$ tal que

$$\sigma_j < -\eta < 0, \qquad \forall j \geq n+1,$$

y considere las siguientes matrices

$$z := \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A} := \begin{bmatrix} \sigma_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \sigma_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} := \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nm} \end{bmatrix}, \tag{4.3}$$

con estas matrices, podemos escribir el sistema finito dimensional inestable correspondiente a las primeras n ecuaciones del sistema (4.2) como:

$$\dot{z}(t) = \mathbf{A}z(t) + \mathbf{B}\mathfrak{sat}(u(t)). \tag{4.4}$$

Observación 4.1.2. *Este cambio de notación ayuda a explicitar que cuando hablemos de $z(t)$, nos estamos refiriendo a las primeras n ecuaciones de (4.2).*

Observación 4.1.3. *Como se puede consultar en [20], la no linealidad de la saturación hace que el anterior sistema se comporte de manera extraña a lo que podríamos estar acostumbrados en un sistema de control finito dimensional. En particular, si consideramos un control de la forma $u(t) = \mathbf{K}z(t)$ donde $\mathbf{K} \in M_{m\times n}$ tal que se cumpla que $\mathbf{A} + \mathbf{BK}$ tenga valores propios negativos, el sistema podría mostrar varios puntos de equilibrio, trayectorias cerradas o incluso trayectorias divergentes. Esto implica que debemos hacer un análisis más profundo del sistema finito dimensional.*

Observación 4.1.4. *Incluso en el caso $m = 1$ con $b_k(x) = e_k(x)$, replicar el desarrollo del primer problema para el sistema (4.2) es complejo. La naturaleza no lineal de la saturación no permite hacer el despeje apropiado para $G_j(t)$ en (3.5), por lo que debemos utilizar otra estrategia para estudiar la estabilidad del sistema.*

En la siguiente sección, buscaremos los espacios adecuados para estudiar la estabilidad de los subsistemas, además de ver las consecuencias de tomar un control de tipo feedback en presencia de la saturación.

4.1.3 Descomposición del sistema en cascada

Vamos a descomponer el sistema original en un subsistema finito dimensional que es inestable y otro subsistema infinito dimensional que es estable. La estrategia que se utilizará consiste en estudiar el problema en otro espacio adecuado para estimar el decaimiento exponencial, para luego argumentar que ese resultado se puede llevar nuevamente al espacio original donde se planteó el problema.

Sea X_n el subespacio vectorial de $L^2(0,L)$ generado por $\{e_j\}_{j=1}^n$, es decir

$$X_n := \mathrm{Span}\langle e_1, ..., e_n\rangle \subset L^2(0,L),$$

y sea $\pi_n : L^2(0,L) \to X_n$ la proyección ortogonal sobre X_n, es decir, que cumple

$$\pi_n w(t,\cdot) := \sum_{j=1}^{n} w_j(t) e_j(\cdot).$$

Definimos además a $X_n^\perp$ como el complemento ortogonal de X_n con respecto a $L^2(0,L)$, es decir, el conjunto que viene dado por

$$X_n^\perp = \{f \in L^2(0,L) \mid \langle f, x\rangle_{L^2(0,L)} = 0, \quad \forall x \in X_n\},$$

y satisface

$$L^2(0,L) = X_n \oplus X_n^\perp. \tag{4.5}$$

Note que $X_n \subset L^2(0,L)$ es un subespacio de dimensión n, luego podemos considerar el isomorfismo $i : \mathbb{R}^n \to X_n$ dado por $i(e^j) = e_j(\cdot)$, donde $\{e^j\}_{j=1}^n$ es la base canónica de $\mathbb{R}^n$.

Este isomorfismo nos permite observar el problema desde una perspectiva más geométrica, pues tenemos mucha más intuición sobre $\mathbb{R}^n$ que en X_n, que es un subespacio de $L^2(0,L)$. La última identificación que utilizaremos viene por la identidad de Parseval [30, Teorema 3.47], que nos entrega una representación isométrica entre $L^2(0,L)$ y $\ell^2(\mathbb{R})$ inducido por el isomorfismo $e_j(\cdot) \mapsto e^j$ donde

$$\ell^2(\mathbb{R}) = \left\{ \{x_k\}_{k\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \quad \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2 < \infty \right\},$$

y los elementos e^j representan una base de vectores para $\ell^2(\mathbb{R})$.

Otra de las ventajas que presenta considerar estas identificaciones, es que la descomposición (4.5) es isomorfa a la descomposición

$$\ell^2(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^n \oplus \ell^2_{j>n}(\mathbb{R}), \tag{4.6}$$

donde consideramos

$$\ell^2_{j>n}(\mathbb{R}) = \left\{ \{x_k\}_{k\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \quad x_k = 0, \forall k \in \{1,...,n\} \ \wedge \ \sum_{k=n+1}^{\infty} |x_k|^2 < \infty \right\},$$

esto nos permite identificar el problema original donde el espacio de estados se descompone en (4.5), con la descomposición isomorfa que mostramos en (4.6).

Busquemos la ley de retroalimentación explícita que satisface el control u. Considere $K : X_n \to \mathbb{R}^m$, luego consideremos un control de la forma

$$u(t) = \mathbf{K} z(t), \tag{4.7}$$

donde

$$\begin{aligned} u(t) &= K\pi_n w(t,\cdot) \\ &= K\left(\sum_{j=1}^{n} w_j e_j(\cdot)\right) \\ &= \sum_{j=1}^{n} w_j K e_j(\cdot) \\ &= \sum_{j=1}^{n} w_j \mathbf{K}_j = \mathbf{K} z(t), \end{aligned}$$

y $\mathbf{K}_j := Ke_j(x) \in \mathbb{R}^m$ para $j \in \{1,...,n\}$. De este modo, tenemos que

$$\mathbf{K} := (\mathbf{K}_1, ..., \mathbf{K}_n) \in \mathbb{R}^{m\times n}.$$

Por tanto el sistema (4.2) con el control feedback (4.7) es equivalente al siguiente sistema de ecuaciones diferenciales en el espacio de estados $\ell^2(\mathbb{R})$

$$\dot{w}_j(t) = \sigma_j w_j(t) + \mathbf{b}_j \cdot \mathfrak{sat}(\mathbf{K} z(t)), \qquad j \in \mathbb{N}. \tag{4.8}$$

Utilizando este control, el subsistema finito dimensional inestable viene dado por

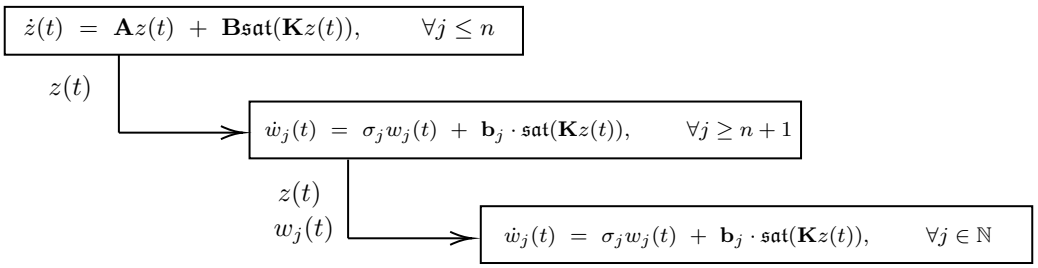
$$\dot{z}(t) = \mathbf{A}z(t) + \mathbf{B}\mathfrak{sat}(\mathbf{K}z(t)), \tag{4.9}$$

mientras que el subsistema infinito dimensional viene dado por

$$\dot{w}_j(t) = \sigma_j w_j(t) + \mathbf{b}_j \cdot \mathfrak{sat}(\mathbf{K}z(t)), \quad j \geq n+1. \tag{4.10}$$

Esto justifica que el sistema completo se considere *en cascada*, pues el primer paso es estabilizar el subsistema finito dimensional (4.9) para luego utilizar esta información en la estabilización del subsistema infinito dimensional (4.10), pues depende del estado $z(t)$, que corresponde a las primeras n ecuaciones del sistema que involucran a $w_j(t)$.

Con esta información podemos estudiar la estabilización del sistema completo, como muestra la siguiente figura.



En este punto es importante cuestionarse sobre las diferencias de resolver este problema y el problema anterior. Consideraremos por un instante que este segundo problema **no** utiliza controles saturados, de modo que la ecuación que gobierna el sistema (4.1) se puede escribir como

$$w_t = Aw + \sum_{k=1}^{m} b_k u_k. \tag{4.11}$$

Recordemos que $b_k(x)$ se denominan localizaciones del control y le dicen al control en qué sector del dominio deben actuar. Otra variante podría ser el considerar $b_k(x)$ como *términos de damping*, algunos trabajos en donde usan localizaciones de este tipo son [23] donde se trabaja con la ecuación de Korteweg-de Vries lineal, mientras que en [27] extienden este resultado para la ecuación de Korteweg-de Vries no lineal.

En particular, si consideramos

$$b_k = e_k, \qquad \forall k \in \{1, ..., m\}, \tag{4.12}$$

y $m = n$, se sigue que la expansión de b_k con respecto a la base ortogonal $\{e_j\}_{j\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{D}(A)$ es

$$b_{jk} = \langle e_k, e_j \rangle_{L^2(0,L)},$$

entonces (4.11) se puede escribir como

$$\begin{cases} \dot{w}_j(t) = \sigma_j w_j(t) + u_j(t), & j \leq n, \\ \dot{w}_j(t) = \sigma_j w_j(t), & j \geq n+1. \end{cases}$$

Así, para las primeras n ecuaciones podemos considerar las matrices

$$\mathbf{W} = \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} \sigma_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \sigma_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{U} = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$$

quedando el sistema

$$\dot{\mathbf{W}} = \mathbf{AW} + \mathbf{U} \tag{4.13}$$

Nos gustaría probar la siguiente

Proposición 4.1.1. *El par* $(\mathbf{A}, \mathbf{I}_n)$ *es estabilizable.*

Demostración. Para ver la estabilidad del par $(\mathbf{A}, \mathbf{I}_n)$, basta probar que el par $(\mathbf{A}, \mathbf{I}_n)$ es controlable.

Utilizando la condición de Kalman, tenemos que

$$\mathbf{C} = [\ \mathbf{I}_n \mid \mathbf{AI}_n \mid \cdots \mid \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{I}_n\ ] \in M_{n\times n^2},$$

donde queremos ver que $\mathbf{C}$ tenga rango completo, es decir,

$$\text{Rank}(\mathbf{C}) = n.$$

Observe que el primer bloque consiste en la matriz identidad $\mathbf{I}_n$ que tiene rango n. Esto implica que $\mathbf{C}$ tenga rango completo, lo que concluye la demostración. □

Observación 4.1.5. *Es importante comentar que* $\mathbf{A}$ *consiste en la matriz donde* $\sigma_j \geq 0$. *Es decir, si alguno de los valores propios es nulo,* $\mathbf{A}$ *no tiene rango completo. La clave de la demostración está en que la matriz de control* $B = \mathbf{I}_n$ *es de rango completo.*

Dado que el par $(\mathbf{A}, \mathbf{I}_n)$ es controlable, se sigue del Teorema de Localización de Polos [6, Teorema 10.1], que existe una matriz

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} G_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & G_n \end{pmatrix}$$

tal que el control feedback $\mathbf{U} = \mathbf{KW}$ estabiliza el sistema (4.13), quedando el sistema de lazo cerrado

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{W}} &= (\mathbf{A} + \mathbf{K})\mathbf{W} \\ &= \begin{pmatrix} \sigma_1 + G_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \sigma_n + G_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Dado $\omega > 0$, queremos escoger los G_j de tal manera que el sistema (4.13) tenga todos sus valores propios con parte real negativa. Por ejemplo, podríamos solicitar que se satisfaga

$$\sigma_j + G_j = -\omega, \qquad \forall j \leq n,$$

de donde notamos que

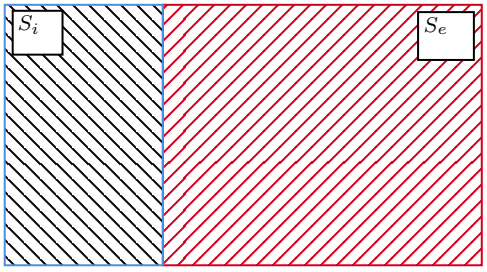
$$G_j = (-\omega - \sigma_j), \qquad \forall j \leq n,$$

que corresponde justamente a las ganancias del control (3.5) del Teorema 3.1.1. Esto muestra que este problema generaliza al anterior en cierta dirección y evita muchos de los cálculos efectuadors en la parte anterior.

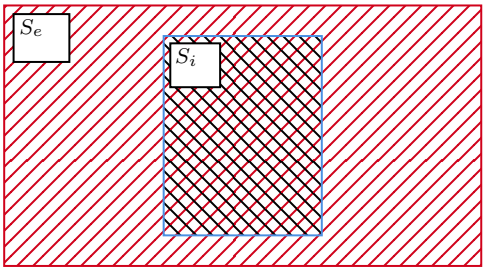
Observación 4.1.6. *Con respecto a los términos de damping localizados, hay trabajos donde se logra estabilizar ecuaciones diferenciales parciales no lineales en presencia de saturaciones. Referenciamos [22] donde se estabiliza de manera semiglobal una ecuación de Korteweg-de Vries no lineal y en [26] donde se obtiene un resultado de estabilidad para la ecuación de Kawahara no lineal. Es importante notar que estas dos ecuaciones no son parabólicas, mostrando la versatilidad de los controles saturados.*

Por último, la gran diferencia entre estos dos problemas es que el primero es completamente lineal: el utilizar las primeras n funciones propias como localizaciones del control (4.12) hace

que el subsistema finito dimensional inestable quede completamente desacoplado del subsistema infinito dimensional estable. Por otro lado, la naturaleza no lineal de la saturación hace que los subsistemas inestables (4.10) y estables (4.9) queden acoplados por el vector de estados $z(t)$ para el segundo problema. A continuación mostramos un diagrama con este último comentario, donde S_e y S_i denotan el sistema estable e inestable, respectivamente.



Sistema lineal (desacoplado)



Sistema no lineal (acoplado)

4.1.4 Sobre la estabilidad del par $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$

Es común encontrar en los trabajos que consideran un operador de Sturm-Liouville general el siguiente supuesto

Supuesto 4.1.1. *Asumiremos que el par* $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ *es estabilizable. Es decir, existe* $\mathbf{K} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ *tal que* $\mathbf{A} + \mathbf{BK}$ *es Hurwitz.*

En esta sección queremos ir un poco más allá, pues estamos considerando concretamente el operador espacial de la ecuación de Kuramoto-Sivashinsky lineal de donde encontramos las matrices (4.3) para el sistema finito dimensional. A continuación damos condiciones más explícitas que buscan reemplazar este supuesto.

1. $m = 1$: En este caso, tenemos que

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix},$$

así, utilizando la condición de Kalman se sigue que

$$\begin{aligned} \det\left(\mathbf{B}, \mathbf{AB}, \cdots, \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}\right) &= \det \begin{pmatrix} b_1 & \sigma_1 b_1 & \cdots & \sigma_1^{n-1} b_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_n & \sigma_n b_n & \cdots & \sigma_n^{n-1} b_n \end{pmatrix} \\ &= \prod_{j=1}^{n} b_j \det \begin{pmatrix} 1 & \sigma_1 & \cdots & \sigma_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \sigma_n & \cdots & \sigma_n^{n-1} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

donde observamos que este último determinante corresponde al determinante de Vandermonde. Por tanto, deducimos que

$$\det\left(\mathbf{B}, \mathbf{AB}, \cdots, \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}\right) = \prod_{j=1}^{n} b_j \prod_{0\le i<k\le n} (\sigma_k - \sigma_i).$$

Para finalizar este caso, notamos que el supuesto es válido cuando $b_j \neq 0$ para todo $j \in \{1, ..., n\}$ y cuando los valores propios sean simples, así $\sigma_k - \sigma_i \neq 0$ y por tanto el determinante de Vandermonde es no nulo, concluyendo la controlabilidad del sistema finito dimensional en este caso.

2. $m \geq 2$ con valores propios simples: En este caso, podemos utilizar la estrategia utilizada en [18] para probar la controlabilidad del par, utilizando el test de Popov-Belevitch-Hautus o Lema de Hautus [33, Lema 3.3.7] para estudiar los bloques asociados a cada valor propio. En particular, en este caso se tiene la matriz

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1,m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nm} \end{pmatrix},$$

y para cada valor propio, buscamos obtener que

$$\text{Rank}\left[\mathbf{A} - \sigma_j \mathbf{I}_n \quad \middle| \quad \mathbf{B}\right] = n, \qquad \forall j \in \{1, ..., n\}.$$

Es decir, este supuesto es válido si se cumple lo siguiente

$$\forall j \in \{1, \ldots, n\},\ \exists k \in \{1, \ldots, m\} :\ b_{jk} \neq 0.$$

3. $m \geq 1$ con valores propios repetidos: Observe que en el caso $m = 1$ el argumento del primer inciso falla por la existencia de valores propios repetidos. Cuando $m > 1$, este problema significa que la matriz de Kalman

$$\mathbf{K} = [\mathbf{B} \,|\, \mathbf{AB} \,|\, \cdots \,|\, \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}] \in M_{n\times(nm)}(\mathbb{R}),$$

es rango deficiente, es decir, $\text{rank}(\mathbf{K}) < n$. La solución para esta dificultad es agregar más localizaciones al sistema, es decir, considerar

$$w_t = Aw + \sum_{k=1}^{m+N_0} b_k u_k.$$

De este modo, nuestra nueva matriz de Kalman es de la forma

$$\tilde{\mathbf{K}} = [\mathbf{B} \,|\, \mathbf{AB} \,|\, \cdots \,|\, \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}] \in M_{n\times[(m+N_0)n]}(\mathbb{R}).$$

Donde $N_0 \in \mathbb{N}$ es la cantidad de localizaciones que agregaremos al sistema para que cumpla la condición de Kalman. Dado que las operaciones elementales columna no modifican el rango de la matriz, sin pérdida de generalidad podemos suponer que

$$\tilde{\mathbf{K}} = [\mathbf{K} \mid \mathbf{N}],$$

con $\mathbf{K}$ la matriz de Kalman asociado al sistema original y $\mathbf{N} \in M_{m\times nN_0}(\mathbb{R})$. Es decir, basta considerar un número apropiado de localizaciones para que el rango de $\mathbf{N}$ complemente al rango de $\mathbf{K}$ de modo que $\tilde{\mathbf{K}}$ tenga rango completo. Por supuesto la inquietud natural que aparece es si existe tal $N_0 \in \mathbb{N}$. La respuesta es afirmativa, como se muestra en [17]. Basta considerar

$$N_0 = \max\{d_1, \ldots, d_n\},$$

donde d_j es la multiplicidad algebraica asociada al valor propio σ_j. Dicho de otra manera, la cantidad de columnas que debemos agregar a la matriz $\mathbf{B}$ es la mayor de las multiplicidades algebraicas de los valores propios del sistema finito dimensional.

Observación 4.1.7. *La condición anterior no es tan fina en cuanto a los valores que deben tomar las localizaciones agregadas. A continuación ilustramos un par de ejemplos para el caso $m = 1$ con valores propios repetidos donde el argumento podría fallar. En primer lugar, considere las matrices*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix},$$

donde tenemos $\sigma_1 = \sigma_2 = 2$. De la condición de Kalman y de operaciones elementales columna se deduce que

$$\operatorname{rank}(\mathbf{K}) = \operatorname{rank}\begin{bmatrix} 2 & 4 & 8 \\ 3 & 6 & 12 \\ 4 & 4 & 4 \end{bmatrix} = \operatorname{rank}\begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & -8 & -24 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 2,$$

por tanto la matriz de Kalman no es de rango completo. Dado que la mayor multiplicidad geométrica es 2, tomamos $N_0 = 2$ y la matriz

$$\mathbf{B_1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

de este modo, la nueva matriz de Kalman asociada cumple

$$\begin{aligned} \operatorname{rank}(\tilde{\mathbf{K}}) &= \operatorname{rank}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 4 & 2 & 2 & 8 & 4 & 4 \\ 3 & 1 & 1 & 6 & 2 & 2 & 12 & 4 & 4 \\ 4 & 1 & 1 & 4 & 1 & 1 & 4 & 1 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \operatorname{rank}\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -4 & -3 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 2 & 2 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 1 & 1 & 12 & 3 & 13 \end{bmatrix} = 3, \end{aligned}$$

es decir, el nuevo sistema es controlable. Sin embargo, si uno toma la matriz

$$\mathbf{B_2} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix},$$

resulta que la matriz de Kalman también tiene rango 3, a pesar de que tomamos menos columnas de lo que sugería la multiplicidad geométrica del valor propio repetido. Por último, si uno repite el desarrollo anterior con las matrices

$$\mathbf{B_3} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{B_4} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 0 \\ 4 & 1 \end{bmatrix},$$

se sigue que la matriz de Kalman asociada a $\mathbf{B_3}$ tiene rango 3, mientras que para $\mathbf{B_4}$, la matriz de Kalman tiene rango 2.
Esto muestra que la condición anterior nos da una cota superior para $N_0 \in \mathbb{N}$, pero no el óptimo. Además, de las últimas dos matrices se ilustra que una combinación de esta estrategia junto con el Lema de Hautus [33, Lema 3.3.7], se puede obtener una condición más fina.

Observación 4.1.8. *Ilustraremos que, incluso en el caso $m = 1$ con valores propios simples, no siempre es posible considerar una localización de la forma $b(x) = \mathbb{1}_\omega$ donde $\omega \subset (0,L)$ es un abierto no vacío. Siguiendo el desarrollo de [5, Lema 2.1], buscamos las funciones propias que satisfacen el sistema*

$$\begin{cases} -w_{xxxx} - \lambda w_{xx} = \sigma w, \\ w(0) = w(L) = 0, \\ w_x(0) = w_x(L) = 0, \end{cases}$$

donde $\sigma > 0$. En este caso, la solución no homogénea del sistema es

$$w(x) = A\cos\left(\alpha\left(x - \frac{L}{2}\right)\right) + B\sin\left(\alpha\left(x - \frac{L}{2}\right)\right) + C\cos\left(\beta\left(x - \frac{L}{2}\right)\right) + D\sin\left(\beta\left(x - \frac{L}{2}\right)\right),$$

donde centramos las soluciones a $x = \frac{L}{2}$ *para aplicar simetría más adelante. En este caso las constantes* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *vienen dadas por*

$$\alpha = \sqrt{\frac{-\lambda - \sqrt{\lambda^2 - 4\sigma}}{2}}, \qquad \beta = \sqrt{\frac{-\lambda + \sqrt{\lambda^2 - 4\sigma}}{2}}.$$

Al aplicar las condiciones de frontera encontramos un sistema de cuatro ecuaciones que se resuelve por casos. Nos enfocaremos en el caso

$$\beta \cos(\beta/2)\sin(\alpha/2) = \alpha \cos(\alpha/2)\sin(\beta/2), \quad \sin(\alpha/2) \neq 0.$$

De este modo, las funciones propias toman la forma

$$w_j(x) = C\left[-\frac{\sin(\beta/2)}{\sin(\alpha/2)}\sin\left(\alpha\left(x - \frac{L}{2}\right)\right) + \sin\left(\beta\left(x - \frac{L}{2}\right)\right)\right],$$

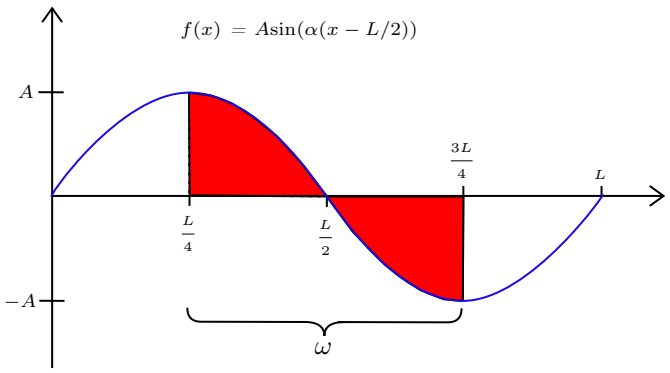
y ahora hacemos valer la simetría con respecto a $L/2$*. Observe que las proyecciones sobre los términos de localización son de la forma*

$$b_j(x) = \langle \mathbb{1}_\omega, w_j \rangle_{L^2(0,L)} = \int_\omega w_j(x)dx.$$

Considerando el intervalo $\omega = \left(\frac{L}{4}, \frac{3L}{4}\right) \subset (0, L)$*, obtenemos que*

$$b_j(x) = \int_{L/4}^{3L/4} w_j(x)dx = 0,$$

pues estamos integrando dos funciones impares con respecto a un intervalo simétrico, como se puede visualizar en la figura de más abajo. Esto muestra que, a pesar de que los valores propios sean simples, la elección de $\omega \subset (0, L)$ *no es trivial, pues dependiendo de la estructura de las funciones propias y el intervalo seleccionado, podemos hacer que el determinante de la matriz de Kalman del primer caso se haga cero, perdiendo la controlabilidad del sistema.*



Por los tres casos anteriores, podemos notar que el supuesto es razonable. En lo que sigue, consideraremos únicamente los primeros dos casos.

4.1.5 Región de atracción y puntos fijos localmente estabilizables

Antes de mostrar el resultado principal de este documento, precisamos definir lo que es una región de atracción y a qué nos referiremos con que un sistema sea localmente estabilizable de manera exponencial.

Definición 4.1.1. *([24, Sección 3]) Suponga que* $\mathbf{K} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ *se escoge de tal manera que 0 es un punto de equilibrio localmente asintóticamente estable de* (4.9)*. Decimos que* $S \subset \mathbb{R}^n$ *es una región de atracción si*

1. $0 \in \operatorname{int} S$;

2. *Para toda condición inicial $z_0 \in S$, sigue que la solución de (4.9) satisface que $z(t) \to 0$ si $t \to \infty$;*

3. *S es invariante hacia adelante, es decir, para toda condición inicial $z_0 \in S$, se cumple que $z(t) \in S$ para todo $t \geq 0$.*

Considerando la inclusión de conjuntos como un orden parcial [35, Relaciones de orden], el mayor conjunto que satisface las tres propiedades anteriores se llama la región de atracción maximal.

Definición 4.1.2. *([24, Sección 3]) El sistema (4.9) se dice localmente estabilizable de manera exponencial en 0 con región de atracción S si las siguientes condiciones se cumplen para una solución $z(t) \in \mathbb{R}^n$:*

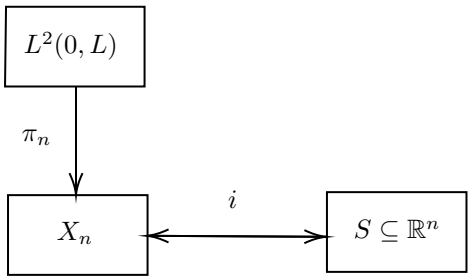
1. *Existen $\varepsilon, M, a > 0$ tales que para toda condición inicial que satisfaga $|z_0| \leq \varepsilon$ se cumpla que*
$$|z(t)| \leq Me^{-at}|z_0|, \quad t \geq 0.$$

2. *$\overline{B_\varepsilon(0)} \subseteq S$ y S es una región de atracción de (4.9).*

Decimos que (4.9) es globalmente estabilizable de manera exponencial en 0 si la primera condición se satisface para constantes $a, M > 0$ y para toda condición inicial $z_0 \in \mathbb{R}^n$.

Observación 4.1.9. *Las dos definiciones anteriores se pueden escribir de manera análoga para el sistema infinito dimensional (4.10).*

Con las definiciones e identificaciones que realizamos en las últimas secciones, podemos considerar el siguiente diagrama



donde π_n es la proyección de $L^2(0, L)$ sobre las primeras n funciones propias de A e i denota el isomorfismo algebraico entre X_n y $S \subseteq \mathbb{R}^n$, ambos de dimensión n. A partir de este diagrama estudiaremos el resultado principal de esta sección, señalando las identificaciones de los sistemas en que trabajaremos.

4.1.6 Resultado principal

En esta sección probaremos el resultado principal de estabilización de la norma $||\cdot||_{L^2(0,L)}$.

La siguiente proposición prueba que gracias al sistema en cascada, basta probar la estabilización del problema finito dimensional para concluir la estabilización de los sistemas con espacios de estados $\ell^2(\mathbb{R})$ y $L^2(0, L)$ respectivamente.

Proposición 4.1.2. *([24, Sección 3]) Suponga que se elige $\mathbf{K} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ tal que el subsistema (4.9) es localmente estabilizable de manera exponencial en $0 \in \mathbb{R}^n$ con región de atracción $S \subseteq \mathbb{R}^n$. Entonces,*

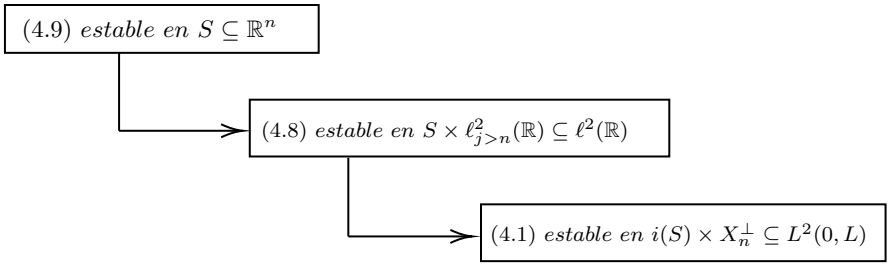
1. *El sistema (4.8) con el control feedback (4.7) es localmente estabilizable de manera exponencial en $0 \in \ell^2(\mathbb{R})$ con región de atracción $S \times \ell^2_{j>n}(\mathbb{R})$.*

2. *El sistema (4.1) con el control feedback (4.7) es localmente estabilizable de manera exponencial en $0 \in L^2(0, L)$ con región de atracción $i(S) \times X_n^\perp$.*

Adicionalmente, para todo conjunto cerrado y acotado $G \subseteq \text{int}(i(S) \times X_n^{\perp})$*, existen dos valores positivos* M *y* a *tales que para cualquier condición inicial* $w(0,\cdot) \in G$*, la solución* $w(\cdot)$ *de* (4.1) *con el control* (4.7) *satisface*

$$||w(t,\cdot)||_{L^2(0,L)} \leq Me^{-at} ||w(0,\cdot)||_{L^2(0,L)}, \quad t \geq 0. \tag{4.14}$$

El esquema de demostración se basa en extender la estabilización exponencial del sistema (4.9) mediante el comportamiento en cascada del sistema, como se ilustra en la siguiente figura donde se muestra la ecuación que se estabiliza con su respectiva región de atracción.



Demostración. Sea $\mathbf{K} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ tal que (4.9) es localmente estabilizable de manera exponencial en 0 con región de atracción $S \subset \mathbb{R}^n$. Sea $G' \subset \text{int}(S)$ un subconjunto cerrado y acotado, luego como el sistema es estabilizable de manera exponencial en 0, existen constantes $M, a > 0$ tales que para todo $z_0 \in G'$ la solución satisface

$$|z(t)| \leq Me^{-at}|z_0|, \qquad t \geq 0. \tag{4.15}$$

De la ley de retroalimentación (4.7) y de (4.10) se tiene que para todo $t \geq 0$ y para toda $(w_{n+1}(0), w_{n+2}(0), ...) \in \ell^2_{j>n}(\mathbb{R})$ se cumple por la fórmula de Duhamel [6, Proposición 1.9] que

$$w_j(t) = e^{\sigma_j t} w_j(0) + \mathbf{b}_j \cdot \int_0^t e^{\sigma_j (t-s)} \mathfrak{sat}(\mathbf{K}z(s))ds, \qquad \forall j \geq n+1.$$

De la definición de la saturación (4.1.1), se obtiene la siguiente estimación

$$|\mathfrak{sat}(\mathbf{K}z)| \leq |\mathbf{K}z| \leq ||\mathbf{K}||\ |z|.$$

De este modo, para todo $j \geq n+1$ tenemos la siguiente estimación

$$|w_j(t)| \leq e^{\sigma_j t}|w_j(0)| + |\mathbf{b}_j| \int_0^t e^{\sigma_j (t-s)}\ ||\mathbf{K}||\ |z(s)|ds,$$

en virtud de que $\sigma_j < -\eta$ para $j \geq n+1$ y que se cumple (4.15), se sigue que

$$|w_j(t)| \leq e^{-\eta t}|w_j(0)| + M|\mathbf{b}_j| \int_0^t e^{-\eta(t-s)}||\mathbf{K}||e^{-as}|z_0|ds.$$

Consideremos en primer lugar el caso donde $\eta \neq a$, luego, tendremos que

$$\begin{aligned}
|w_j(t)| &\leq e^{-\eta t}|w_j(0)| + M|\mathbf{b}_j|\,||\mathbf{K}||\,|z_0| \int_0^t e^{-\eta(t-s)}e^{-as}ds \\
&= e^{-\eta t}|w_j(0)| + M|\mathbf{b}_j|\,||\mathbf{K}||\,|z_0|e^{-\eta t} \int_0^t e^{(\eta-a)s}ds \\
&= e^{-\eta t}|w_j(0)| + M|\mathbf{b}_j|\,||\mathbf{K}||\,|z_0|e^{-\eta t}\left(\frac{e^{(\eta-a)t}-1}{\eta-a}\right) \\
&= e^{-\eta t}|w_j(0)| + M|\mathbf{b}_j|\,||\mathbf{K}||\,|z_0|\left(\frac{e^{-at}-e^{-\eta t}}{\eta-a}\right).
\end{aligned}$$

Observe que el último término es positivo por la monotonía de la exponencial. Nuestra intención es probar que los términos $|w_j(t)|$ son cuadrado sumables para $j \geq n+1$. Para esto note que utilizando la desigualdad

$$(a+b)^2 \leq 2(a^2+b^2), \qquad \forall (a,b) \in \mathbb{R}^2,$$

obtenemos de la estimación anterior que

$$|w_j(t)|^2 \leq 2e^{-2\eta t}|w_j(0)|^2 + 2M^2 \left|\left|\mathbf{K}\right|\right|^2 |z_0|^2 \left(\frac{e^{-at}-e^{-\eta t}}{\eta - a}\right)^2 |\mathbf{b}_j|^2 .$$

Para el primer término, recordemos que $\{w_j(0)\}_{j=n+1}^{\infty} \in \ell^2_{j>n}(\mathbb{R})$, por tanto es cuadrado sumable. Para el segundo término, notamos que los términos son no negativos, de donde se sigue que al sumar sobre $j \geq n+1$,

$$\begin{aligned} \sum_{j=n+1}^{\infty} |\mathbf{b}_j|^2 &= \sum_{j=n+1}^{\infty} \sum_{k=1}^{m} |b_{jk}|^2 \\ &= \sum_{j=n+1}^{\infty} \sum_{k=1}^{m} \left|\langle b_k, e_j \rangle_{L^2(0,L)}\right|^2 \\ &\leq \sum_{k=1}^{m} ||b_k||^2_{L^2(0,L)} , \end{aligned} \tag{4.16}$$

donde en el último paso usamos la desigualdad de Bessel [30, Lema 3.41] y que $b_k \in L^2(0,L)$ para todo $k \in \{1,...,m\}$. Ahora, sin pérdida de generalidad asumiremos que $\eta > a$, de modo que se tenga $e^{-\eta t} < e^{-at}$. Además, usando que

$$\left(\frac{e^{-at}-e^{-\eta t}}{\eta - a}\right)^2 \leq \frac{e^{-2at}}{(\eta - a)^2},$$

obtenemos la siguiente estimación

$$|w_j(t)|^2 \leq 2e^{-2at}|w_j(0)|^2 + \frac{2M^2 \left|\left|\mathbf{K}\right|\right|^2 |\mathbf{b}_j|^2}{(\eta - a)^2} e^{-2at}|z_0|^2 \tag{4.17}$$

de modo que al tomar la suma para $j \geq n+1$, sigue que

$$\sum_{j\geq n+1} |w_j(t)|^2 \leq 2e^{-at} \sum_{j\geq n+1} |w_j(0)|^2 + \frac{2M^2 \left|\left|\mathbf{K}\right|\right|^2 \sum_{k=1}^{m} ||b_k||^2_{L^2(0,L)}}{(\eta - a)^2} e^{-2at}|z_0|^2, \tag{4.18}$$

donde usamos la estimación (4.16). Finalmente, considerando

$$C = \max\left\{ 2, \frac{2M^2 \left|\left|\mathbf{K}\right|\right|^2 \sum_{k=1}^{m} ||b_k||^2_{L^2(0,L)}}{(\eta - a)^2} \right\} > 0, \tag{4.19}$$

y recordando que

$$|z_0|^2 = \sum_{j=1}^{n} |w_j(0)|^2,$$

se concluye que

$$\sum_{j\geq n+1} |w_j(t)|^2 \leq Ce^{-2at} \sum_{j\in\mathbb{N}} |w_j(0)|^2 ,$$

que corresponde al decaimiento exponencial en el espacio de estados $\ell^2(\mathbb{R})$, dado una condición inicial en $G' \times \ell^2_{j>n}(\mathbb{R})$.

Observación 4.1.10. *En el caso donde $\eta < a$ el desarrollo es análogo considerando*

$$e^{-at} < e^{-\eta t}, \qquad \wedge \qquad \left(e^{-at} - e^{-\eta t}\right)^2 = \left(e^{-\eta t} - e^{-at}\right)^2,$$

de modo que el decaimiento toma la forma

$$\sum_{j\geq n+1} |w_j(t)|^2 \leq Ce^{-2\eta t} \sum_{j\in\mathbb{N}} |w_j(0)|^2,$$

donde $C > 0$ es la misma constante de (4.19).

Para terminar la demostración debemos considerar el caso $\eta = a$. La estimación toma la forma

$$\begin{aligned} |w_j(t)| &\leq e^{-\eta t}|w_j(0)| + M|\mathbf{b}_j|\,||\mathbf{K}||\,|z_0|e^{-\eta t}\int_0^t e^{(\eta-a)s}ds \\ &= e^{-\eta t}|w_j(0)| + M|\mathbf{b}_j|\,||\mathbf{K}||\,|z_0|e^{-\eta t}\left(s|_0^t\right) \\ &= e^{-\eta t}|w_j(0)| + M|\mathbf{b}_j|\,||\mathbf{K}||\,|z_0|e^{-\eta t}t \\ &= e^{-(\eta-1)t}\left[|w_j(0)| + M|\mathbf{b}_j|\,||\mathbf{K}||\,|z_0|\right], \end{aligned}$$

donde utilizamos la estimación

$$t \leq e^t, \qquad t \geq 0,$$

junto con $0 < \eta - 1 < \eta$ y la monotonía de la exponencial. Observe que esta expresión es el análogo de la desigualdad (4.17) para el caso $\eta \neq a$, por lo que siguiendo las estimaciones previas probamos el decaimiento exponencial en este caso.
Usando nuevamente que $|w_j(0)|^2$ es cuadrado sumable para $j \geq 0$ y la estimación (4.16), concluimos que $\displaystyle\sum_{j=n+1}^{\infty} |w_j(t)|^2$ en $\ell^2_{j>n}(\mathbb{R})$ es finito. Siguiendo la idea del desarrollo de los dos casos anteriores, obtenemos el resultado de estabilidad en el espacio de estados $\ell^2(\mathbb{R})$.
Para concluir la primera parte de la proposición debemos determinar la región de atracción asociada a la estabilización en el espacio de estados $\ell^2(\mathbb{R})$. Tenemos por hipótesis que el subsistema (4.4) es localmente estabilizable de manera exponencial en 0 con región de atracción S, y dado que probamos anteriormente el decaimiento exponencial de $\displaystyle\sum_{j=n+1}^{\infty} |w_j(t)|^2$ en $\ell^2_{j>n}(\mathbb{R})$, basta tomar $G' \subset \text{int}(S)$ tal que $0 \in \text{int}(G') \subset \mathbb{R}^n$. Así, notando que si S es región de atracción, entonces $0 \in \text{int}(S)$ y $\text{int}(G') \subset S$ también, obtenemos que $0 \in \text{int}(G') \times \ell^2_{j>n}(\mathbb{R}) \subset \ell^2(\mathbb{R})$.
Para la segunda proposición, notamos que el isomorfismo $i : \mathbb{R}^n \to X_n \subset L^2(0, L)$ junto con el isomorfismo isométrico entre $\ell^2_{j>n}(\mathbb{R})$ y $X_n^{\perp}$ permiten concluir el decaimiento exponencial local en $0 \in L^2(0, L)$. Esto pues de (4.18) tenemos que al sumar (4.15) obtenemos la estimación

$$\sum_{j\in\mathbb{N}} |w_j(t)|^2 \leq 2e^{-2at} \sum_{j\geq n+1} |w_j(0)|^2 + \left[\frac{2M^2\,||\mathbf{K}||^2 \displaystyle\sum_{k=1}^{m} ||b_k||^2_{L^2(0,L)}}{(\eta - a)^2} + M^2\right] e^{-2at}|z_0|^2,$$

utilizando la identidad de Parseval junto con

$$\tilde{C}^2 = \max\left\{2, \frac{2M^2\,||\mathbf{K}||^2 \sum_{k=1}^{m} ||b_k||^2_{L^2(0,L)}}{(\eta - a)^2} + M^2\right\} > 0,$$

obtenemos la siguiente desigualdad

$$||w(t,\cdot)||^2_{L^2(0,L)} \leq \tilde{C}^2 e^{-2at}\,||w(0,\cdot)||^2_{L^2(0,L)}\,,$$

de donde se concluye el decaimiento exponencial (4.14). Gracias a los isomorfismos previamente utilizados, se sigue que la región de atracción viene dada por $i(G') \times X_n^{\perp} \subset L^2(0, L)$.

Para el último comentario, note que basta determinar la región de atracción apropiada, pues de las estimaciones ya encontramos (4.14). Considere un conjunto cerrado y acotado $G \subset \text{int}(i(S) \times X_n^{\perp})$ y tome $G' = i^{-1} \circ \pi_n(G)$, entonces G' es compacto, pues G es cerrado y acotado, π_n es continua y i es una transformación lineal entre espacios de dimensión finita y por tanto es continua. Esto asegura que se satisfaga (4.15) en subconjuntos de S, lo que concluye la demostración.

□

Para poder aplicar la proposición anterior es necesario probar el decaimiento exponencial en una vecindad de 0 y estimar la región de atracción en $\mathbb{R}^n$ asociada al sistema finito dimensional (4.4). Aquí la saturación muestra otra dificultad.

Observación 4.1.11. *Bajo los comentarios que hicimos para el Supuesto 4.1.1, el sistema (4.4)* ***no*** *necesariamente es estabilizable.*

En [34, Ejemplo 1.1] estudian un problema de control finito dimensional en el caso lineal y saturado. Para el primero, se prueba que el par $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ es estabilizable y que el sistema es asintóticamente estable, mientras que para el caso saturado, el sistema muestra trayectorias divergentes aún dentro de la zona de saturación. Este mismo ejemplo es desarrollado en [20, Ejemplo 4] con gráficos de las trayectorias específicas y también el código para la implementación numérica.

El enfoque que usaremos para probar que el sistema (4.4) se puede estabilizar exponencialmente se sustenta en la teoría de *desigualdades matriciales lineales* o, por sus siglas en inglés, *LMI* y condiciones geométricas para la saturación, de modo que pueda ser introducida en las matrices aumentadas de la teoría de *LMI*. La gran ventaja es que para probar la estabilización del sistema finito dimensional

$$\dot{z}(t) = \mathbf{A}z(t), \qquad \forall t \geq 0,$$

donde $z(t) \in \mathbb{R}^n, \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, basta probar la existencia de una matriz simétrica y definida positiva $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tal que se satisfaga la desigualdad de Lyapunov [1, ecuación (1.2)]

$$\mathbf{A}^\top \mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{A} \prec -\mathbf{I}_n,$$

que corresponde a un sistema de $\dfrac{n(n-1)}{2}$ ecuaciones que se puede resolver de manera analítica y computacional. En la literatura hay métodos computacionales eficaces para resolver el sistema, permitiendo incluso poder encontrar la *región de atracción* del sistema, como en [24, IV. Experimentos numéricos].

Agregar una saturación significa que el sistema perderá su naturaleza lineal y podría presentar una amenaza para la teoría *LMI*. El documento de [34] muestra que, a pesar de que los desarrollos pueden presentar más dificultades, los sistemas no lineales convexos se pueden transformar en sistemas completamente lineales gracias al *Lema de Schur*, donde *LMI* sí aplica, como se muestra en [34, Apéndice C.5].

En [20] se muestra la compatibilidad entre controles saturados y el análisis espectral de operadores parabólicos. Esto se debe a la existencia de una cantidad finita de valores propios no negativos y el posterior estudio del sistema finito dimensional inestable haciendo uso de *LMI* para manejar la saturación y estabilizar el sistema. En [24] se emplea esta teoría sobre una ecuación de reacción-difusión inestable, referenciada como la ecuación del calor inestable, en [19] se utilizan los mismos argumentos para estabilizar un operador parabólico más general.

Para probar el decaimiento exponencial del sistema finito dimensional comenzaremos enunciando las propiedades geométricas que utilizaremos para la saturación.

Introducimos la no linealidad de tipo *deadzone* $\phi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ [34, Sección 1.7.2] definida por

$$\phi(u) = \mathfrak{sat}(u) - u, \quad \forall u \in \mathbb{R}^m,$$

donde seguimos usando la saturación componente a componente definida en (4.1.1). Esta no linealidad nos permitirá separar la saturación como la suma de dos vectores que podrán ser agregados a la matriz aumentada. Además, usaremos la condición de sector generalizado: [34, Lema 1.6]

Lema 4.1.1. *Si para* $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $z \in \mathbb{R}^n$ *y* $j \in \{1, ..., m\}$ *se cumple que* $|((\mathbf{K} - \mathbf{C})z)_j| \leq \ell$, *entonces*

$$\phi_j(\mathbf{K}z)(\phi_j(\mathbf{K}z) + (\mathbf{C}z)_j) \leq 0.$$

Observación 4.1.12. *La motivación detrás de usar la condición de sector generalizado es que nos permitirá construir un funcional de Lyapunov que ayude a estudiar el decaimiento exponencial gracias a la aparición de una matriz aumentada de estabilización que será definida negativa.*

Una consecuencia importante del lema anterior es que la desigualdad sigue siendo válida si se multiplica por números no negativos. Recopilando tales valores en una matriz diagonal positiva definida $\mathbf{D} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, se tiene que

$$\phi(\mathbf{K}z)^\top \mathbf{D}(\phi(\mathbf{K}z) + \mathbf{C}z) \leq 0.$$

Otro lema importante para poder condensar información del problema es el complemento de Schur. [34, Apéndice C.5]

Lema 4.1.2. *(Lema de Schur) Sea* $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{m\times m}$ *y sea*

$$\mathbf{M} := \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B}^\top \\ \mathbf{B} & \mathbf{C} \end{pmatrix}.$$

Si $\mathbf{C}$ *es definida positiva, entonces* $\mathbf{M}$ *es positiva definida si y solo si su complemento de Schur* $\mathbf{M} \setminus \mathbf{C} := \mathbf{A} - \mathbf{B}^\top \mathbf{C}^{-1} \mathbf{B}$ *es semidefinida positiva.*

La siguiente proposición prueba el decaimiento exponencial de manera local para el problema finito dimensional (4.9) y además nos entrega una región de atracción explícita.

Proposición 4.1.3. *([24, Proposición 2] Sea* $\mathbf{K} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ *tal que la matriz* $\mathbf{A} + \mathbf{BK}$ *es Hurwitz. Sea* $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *una matriz simétrica definida positiva,* $\mathbf{D} \in \mathbb{R}^{m\times m}$ *diagonal definida positiva y* $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ *tal que*

$$\mathbf{M}_1 := \begin{pmatrix} (\mathbf{A} + \mathbf{BK})^\top \mathbf{P} + \mathbf{P}(\mathbf{A} + \mathbf{BK}) & \mathbf{PB} - (\mathbf{DC})^\top \\ (\mathbf{PB})^\top - \mathbf{DC} & -2\mathbf{D} \end{pmatrix} \prec 0, \tag{4.20}$$

y

$$\mathbf{M}_2 := \begin{pmatrix} \mathbf{P} & (\mathbf{K} - \mathbf{C})^\top \\ \mathbf{K} - \mathbf{C} & \ell^2 \mathbf{I}_m \end{pmatrix} \succeq 0. \tag{4.21}$$

Entonces el sistema finito dimensional (4.4) es localmente estabilizable de manera exponencial en 0 con región de atracción dada por

$$\mathcal{A} := \{z \in \mathbb{R}^n : \quad z^\top \mathbf{P} z \leq 1\}.$$

Más aún, en $\mathcal{A}$ se tiene que el funcional $V_1(z) := z^\top \mathbf{P} z$ con $z \in \mathbb{R}^n$ decrece de manera exponencial a 0 sobre las soluciones del sistema (4.4), es decir, existe una constante $\alpha > 0$ tal que

$$\dot{V}_1(z) \leq -\alpha |z|^2, \quad z \in \mathcal{A}.$$

Demostración. Veamos en primer lugar que las matrices (4.20) y (4.21) son factibles, es decir, que bajo las hipótesis de la proposición, se pueden encontrar matrices $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ simétrica definida positiva, $\mathbf{D} \in \mathbb{R}^{m\times m}$ diagonal definida positiva y $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ tales que las desigualdades (4.20) y (4.21) se cumplan. Dado que $\mathbf{A} + \mathbf{BK}$ es Hurwitz, por la desigualdad de Lyapunov [1, ecuación (1.2)] existe una matriz simétrica y definida positiva $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tal que

$$(\mathbf{A} + \mathbf{BK})^\top \mathbf{P} + \mathbf{P} (\mathbf{A} + \mathbf{BK}) \prec 0.$$

Para ver la existencia de $\mathbf{C}$, considere $\mathbf{C} = 0 \in \mathbb{R}^{m\times n}$ y note que $\ell^2 \mathbf{I}_m \succ 0$. Considere $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ con norma suficientemente grande de modo que

$$\mathbf{P} - \mathbf{K}^\top \frac{1}{\ell^2} \mathbf{I}_m \mathbf{K} \succeq 0.$$

Se sigue del lema de Schur (4.1.2) que (4.21) es factible.

Por último, para ver la existencia de $\mathbf{D} \in \mathbb{R}^{m\times m}$ y la factibilidad de (4.20), fije $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tal que la desigualdad de Lyapunov sea válida y $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ que cumpla la condición de sector generalizado 4.1.1. De este modo la derivada del funcional de energía satisface, como veremos a continuación, que

$$\begin{aligned}
\dot{V}_1(z) &= z^\top \left[(\mathbf{A} + \mathbf{BK})^\top \mathbf{P} + \mathbf{P}(\mathbf{A} + \mathbf{BK})\right] z + 2 z^\top \mathbf{PB} \phi(\mathbf{K}z) - 2\phi(\mathbf{K}z)^\top \mathbf{D}(\phi(\mathbf{K}z) + \mathbf{C}z)) \\
&= \begin{pmatrix} z \\ \phi(\mathbf{K}z) \end{pmatrix}^\top \begin{pmatrix} (\mathbf{A} + \mathbf{BK})^\top \mathbf{P} + \mathbf{P}(\mathbf{A} + \mathbf{BK}) & \mathbf{PB} - (\mathbf{DC})^\top \\ (\mathbf{PB})^\top - \mathbf{DC} & -2\mathbf{D} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z \\ \phi(\mathbf{K}z) \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Finalmente, basta tomar $\mathbf{D} \in \mathbb{R}^{m\times m}$ con norma suficientemente grande para asegurar que (4.20) es definida negativa, lo que concluye la factibilidad de las matrices.

Habiendo mostrado la factibilidad de $\mathbf{M}_1$ y $\mathbf{M}_2$, considere $\mathbf{P}, \mathbf{D}, \mathbf{C}$ matrices tales que se cumple (4.20) y (4.21), que no necesariamente son las mismas que acabamos de ver. Además, considere el candidato a funcional de Lyapunov

$$V_1(z) = z^\top \mathbf{P} z,$$

donde $z \in \mathbb{R}^n$ es solución del sistema (4.9). Luego

$$\begin{aligned}
\dot{V}_1(z) &= \dot{z}^\top \mathbf{P} z + z^\top \mathbf{P} \dot{z} \\
&= (\mathbf{A}z + \mathbf{B}\mathfrak{sat}(\mathbf{K}z))^\top \mathbf{P} z + z^\top \mathbf{P}(\mathbf{A}z + \mathbf{B}\mathfrak{sat}(\mathbf{K}z)),
\end{aligned}$$

utilizando la no linealidad de tipo *deadzone*, se sigue que

$$\mathfrak{sat}(\mathbf{K}z) = \phi(\mathbf{K}z) + \mathbf{K}z,$$

y por tanto

$$\dot{V}_1(z) = z^\top \left[(\mathbf{A} + \mathbf{BK})^\top \mathbf{P} + \mathbf{P}(\mathbf{A} + \mathbf{BK})\right] z + 2 z^\top \mathbf{PB} \phi(\mathbf{K}z),$$

donde usamos que $z^\top \mathbf{PB} \phi(\mathbf{K}z) = \phi(\mathbf{K}z)^\top (\mathbf{PB})^\top z$. Suponga que se satisface que $|((\mathbf{K} - \mathbf{C})z)_j| \leq \ell$ para todo $j \in \{1, ..., m\}$. Entonces por consecuencia de la condición de sector generalizado

4.1.1 y multiplicando por -2 se obtiene

$$0 \leq -2\phi(\mathbf{K}z)^\top \mathbf{D}(\phi(\mathbf{K}z) + \mathbf{C}z)),$$

por tanto,

$$\begin{aligned}\dot{V}_1(z) &= z^\top \left[(\mathbf{A}+\mathbf{B}\mathbf{K})^\top \mathbf{P} + \mathbf{P}(\mathbf{A}+\mathbf{B}\mathbf{K})\right] z + 2z^\top \mathbf{P}\mathbf{B}\phi(\mathbf{K}z) \\ &\leq z^\top \left[(\mathbf{A}+\mathbf{B}\mathbf{K})^\top \mathbf{P} + \mathbf{P}(\mathbf{A}+\mathbf{B}\mathbf{K})\right] z + 2z^\top \mathbf{P}\mathbf{B}\phi(\mathbf{K}z) - 2\phi(\mathbf{K}z)^\top \mathbf{D}(\phi(\mathbf{K}z) + \mathbf{C}z)) \\ &= \begin{pmatrix} z \\ \phi(\mathbf{K}z) \end{pmatrix}^\top \mathbf{M}_1 \begin{pmatrix} z \\ \phi(\mathbf{K}z) \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Por hipótesis, tenemos que la matriz $\mathbf{M}_1$ es definida negativa. Entonces considerando $-\alpha < 0$ como el mayor valor propio de $\mathbf{M}_1$, se sigue que $\mathbf{M}_1 \preceq -\alpha \mathbf{I}_{n+m}$ y por tanto

$$\dot{V}_1(z) \leq -\alpha |z|^2, \tag{4.22}$$

de donde se deduce el decaimiento exponencial, pues denotando por $\beta_{min} > 0$ y $\beta_{max} > 0$ el menor y máximo valor propio de $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, se tiene

$$\beta_{min} |z|^2 \leq z^\top \mathbf{P} z \leq \beta_{max} |z|^2$$

y de aquí se deduce que

$$-\alpha |z|^2 \leq -\frac{\alpha}{\beta_{max}} z^\top \mathbf{P} z = -\frac{\alpha}{\beta_{max}} V_1(z).$$

Usando (4.22) obtenemos

$$\dot{V}_1(z) \leq -\frac{\alpha}{\beta_{max}} V_1(z),$$

de donde se concluye el decaimiento exponencial del sistema finito dimensional:

$$V_1(z) \leq e^{-\frac{\alpha}{\beta_{max}}} V_1(0).$$

Finalmente, basta probar que $|((\mathbf{K}-\mathbf{C})z)_j| \leq \ell$ efectivamente se satisface para todo $j \in \{1, ..., m\}$. Para esto, considere el funcional de Lyapunov V_1 y forcemos a que

$$\mathcal{A} = \{z \in \mathbb{R}^n \ : \ z^\top \mathbf{P} z \leq 1\} \subseteq \{z \in \mathbb{R}^n \ : \ |(\mathbf{K}-\mathbf{C})z| \leq \ell\},$$

Es decir, que la región de atracción $\mathcal{A}$ se encuentre dentro del sector generalizado para la saturación. Note que para este último conjunto se tiene

$$\{z \in \mathbb{R}^n \ : \ |(\mathbf{K}-\mathbf{C})z| \leq \ell\} = \{z \in \mathbb{R}^n \ : \ z^\top (\mathbf{K}-\mathbf{C})^\top (\mathbf{K}-\mathbf{C}) z \leq \ell^2\},$$

por tanto la contención a probar es que

$$\{z \in \mathbb{R}^n \ : \ z^\top \mathbf{P} z \leq 1\} \subseteq \{z \in \mathbb{R}^n \ : \ z^\top (\mathbf{K}-\mathbf{C})^\top \frac{1}{\ell^2} \mathbf{I}_m (\mathbf{K}-\mathbf{C}) z \leq 1\}.$$

Dado que ambos conjuntos son elipsoides de centro $0 \in \mathbb{R}^n$, se sigue por [4, Proposición 1] que esto es equivalente a la siguiente desigualdad matricial

$$\mathbf{M}_2 \setminus \ell^2 \mathbf{I}_m = \mathbf{P} - (\mathbf{K}-\mathbf{C})^\top \frac{1}{\ell^2} \mathbf{I}_m (\mathbf{K}-\mathbf{C}) \succeq 0.$$

Donde $\mathbf{M}_2 \setminus \ell^2 \mathbf{I}_m$ denota el complemento de Schur. Usando que $\ell^2 \mathbf{I}_m$ es una matriz definida positiva, el Lema de Schur 4.1.2 asegura que esta desigualdad matricial es equivalente a pedir que la matriz $\mathbf{M}_2$ satisfaga (4.21). Esto es

$$\mathbf{M}_2 = \begin{pmatrix} \mathbf{P} & (\mathbf{K}-\mathbf{C})^\top \\ \mathbf{K}-\mathbf{C} & \ell^2 \mathbf{I}_m \end{pmatrix} \succeq 0.$$

Lo que finaliza la demostración. □

En virtud de las dos proposiciones anteriores, podemos demostrar el resultado principal de esta sección:

Teorema 4.1.1. *Sea* $\mathbf{K}$ *tal que* $\mathbf{A}+\mathbf{BK}$ *es Hurwitz y* $K : X_n \to \mathbb{R}^m$ *se elige para construir el control feedback* (4.7)*. Entonces el sistema con feedback* K

$$\begin{cases} w_t(t,x) + w_{xxxx}(t,x) + \lambda w_{xx} = \displaystyle\sum_{j=1}^{m} b_k(x)\mathfrak{sat}((K\pi_n w(t,\cdot))_k), & (t,x) \in (0,+\infty)\times(0,L), \\ w(t,0) = w(t,L) = 0, & t \in (0,+\infty), \\ w_x(t,0) = w_x(t,L) = 0, & t \in (0,+\infty), \\ w(0,x) = w_0(x), & x \in (0,L). \end{cases}$$

es localmente estabilizable de manera exponencial en 0 con región de atracción $i(\mathcal{A}) \times X_n^{\perp}$*. Adicionalmente, las constantes de decaimiento se pueden escoger de manera uniforme en* $i(\mathcal{A}) \times X_n^{\perp}$*.*

Demostración. Considere el sistema (4.1) con el par $(\mathbf{A},\mathbf{B})$ estabilizable. Por el Teorema de Localización de Polos [6, Teorema 10.1], existe $\mathbf{K} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ tal que $\mathbf{A}+\mathbf{BK}$ es Hurwitz, luego considerando $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\mathbf{D} \in \mathbb{R}^{m\times m}$ y $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ tales que se cumpla (4.20) y (4.21), se sigue por la Proposición 4.1.2 que el sistema finito dimensional (4.9) es localmente estabilizable de manera exponencial en $0 \in \mathbb{R}^n$ con región de atracción dada por

$$\mathcal{A} = \{z \in \mathbb{R}^n \ : \ z^{\top}\mathbf{P}z \leq 1\}.$$

Con este resultado completamos las hipótesis de la Proposición 4.1.3, lo que nos asegura que el sistema (4.1) es localmente estabilizable de manera exponencial en $0 \in L^2(0,L)$ con región de atracción dada por $i(\mathcal{A}) \times X_n^{\perp}$.

Finalmente, para ver que las constantes de decaimiento se pueden escoger de manera uniforme en $i(\mathcal{A}) \times X_n^{\perp}$, aplicamos la demostración del último comentario de la Proposición 4.1.2 tomando $\mathcal{A} = S$. □

4.2 Estabilización en $H_0^2(0,L)$

En la sección anterior probamos el decaimiento exponencial de la norma $||\cdot||_{L^2(0,L)}$, y por las condiciones de frontera del problema (4.1), posibles extensiones de este resultados son el estudio de la estabilización exponencial de las normas en $||\cdot||_{H_0^1(0,L)}$ y $||\cdot||_{H_0^2(0,L)}$.

En este apartado probaremos la estabilización de la norma en $H_0^2(0,L)$, haciendo uso de los resultados de la sección anterior. Veremos que a partir del control (4.7) y del funcional de Lyapunov $V_1(z)$ es posible construir otro funcional que sea equivalente a la norma $H_0^2(0,L)$. La referencia principal de este desarrollo es [10].

Sean $z \in \mathbb{R}^n$ solución del sistema finito dimensional (4.9) y el funcional de Lyapunov $V_1(t) = z^{\top}\mathbf{P}z$, asumiendo válido el Teorema 4.1.1. Considere el siguiente funcional de Lyapunov

$$V_2(t) = -\frac{1}{2}\langle Aw, w\rangle_{L^2(0,L)} + \frac{M}{2}V_1(t) = -\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{\infty}\sigma_j w_j(t)^2 + \frac{M}{2}z^{\top}\mathbf{P}z,$$

donde w es solución de (4.1) y $M > 0$ es una constante por buscar para asegurar el decaimiento exponencial.

Observación 4.2.1. *En la estructura del funcional de Lyapunov* $V_2(t)$ *puede llamar la atención el término* $-\frac{1}{2}\langle Aw, w\rangle$*. Dado que necesitamos que* $V_2(t) \geq 0$ *y que por el análisis espectral del operador sabemos que* A *posee una cantidad infinita de valores propios negativos, este signo busca asegurar la no negatividad de* $V_2(t)$*.*

Concretamente, buscamos probar que existen $(C, \omega) \in (1, +\infty) \times (0, \infty)$ tales que

$$||w||^2_{H^2_0(0,L)} \leq Ce^{-\omega t} ||w_0||^2_{H^2_0(0,L)}. \tag{4.23}$$

Para probar (4.23), separaremos la demostración en tres lemas previos que demostraremos a continuación.

4.2.1 Lemas previos

En lo que sigue, asumiremos válidas las hipótesis del Teorema (4.1.1).

Lema 4.2.1. *Existen constantes $C_1, C_2 > 0$ tales que*

$$\frac{C_1}{2}|z|^2 + \frac{C_1}{2C_2}||w||^2_{H^2_0(0,L)} \leq V_2(t), \qquad \forall t \geq 0. \tag{4.24}$$

Demostración. Denotemos por $\beta_{min} > 0$ y $\beta_{max} > 0$ el mínimo y el máximo valor propio asociado a la matriz simétrica definida positiva $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, es decir, satisfacen la siguiente desigualdad

$$0 < \beta_{min}|z|^2 \leq z^\top \mathbf{P} z \leq \beta_{max}|z|^2. \tag{4.25}$$

De la primera desigualdad de (4.25) obtenemos que

$$V_1(t) \geq \beta_{min}|z|^2. \tag{4.26}$$

Por otro lado, usando que $\sigma_1 \geq \sigma_j$ para $j \in \{1, ..., n\}$ y que $z(t)$ cumple (4.3), se sigue que

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{\infty}\sigma_j w_j(t)^2 &= -\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\sigma_j w_j(t)^2 - \frac{1}{2}\sum_{j=n+1}^{\infty}\sigma_j w_j(t)^2 \\ &\geq -\frac{\sigma_1}{2}|z|^2 - \frac{1}{2}\sum_{j=n+1}^{\infty}\sigma_j w_j(t)^2 \end{aligned} \tag{4.27}$$

juntando (4.26) y (4.27) obtenemos que

$$\begin{aligned} V_2(t) &= -\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{\infty}\sigma_j w_j(t)^2 + \frac{M}{2}V_1(t) \\ &\geq \frac{(M\beta_{min} - \sigma_1)}{2}|z|^2 - \frac{1}{2}\sum_{j=n+1}^{\infty}\sigma_j w_j(t)^2 \\ &\geq C_1\left(|z|^2 - \sum_{j=n+1}^{\infty}\sigma_j w_j(t)^2\right), \end{aligned} \tag{4.28}$$

donde

$$C_1 = \min\left\{\frac{M\beta_{min} - \sigma_1}{2}, \frac{1}{2}\right\} > 0, \qquad M > \frac{\sigma_1}{\beta_{min}}.$$

Por otro lado, dado que

$$Ae_j = \sigma_j e_j \quad \Longleftrightarrow \quad -e_j'''' - \lambda e_j'' = \sigma_j e_j, \qquad \forall j \in \mathbb{N},$$

y que podemos usar la Sección 2.1 para expandir w como en (3.4), se sigue de dos integraciones por parte que

$$\begin{aligned}||w(t,\cdot)||^2_{H_0^2(0,L)} &= \sum_{(j,k)\in\mathbb{N}^2} w_j w_k \left\langle e_j'', e_k''\right\rangle_{L^2(0,L)} \\ &= \sum_{(j,k)\in\mathbb{N}^2} w_j w_k \left\langle e_j'''', e_k\right\rangle_{L^2(0,L)} \\ &= \sum_{(j,k)\in\mathbb{N}^2} w_j w_k \left\langle -\lambda e_j'' - \sigma_j e_j, e_k\right\rangle_{L^2(0,L)} \\ &= -\lambda\langle w_{xx}, w\rangle_{L^2(0,L)} - \sum_{j=1}^{\infty}\sigma_j w_j(t)^2\end{aligned}$$

donde en la última línea usamos la ortonormalidad de $\{e_j\}_{j\in\mathbb{N}}$. Utilizando la desigualdad de Cauchy-Schwarz se sigue que

$$\begin{aligned}||w||^2_{H_0^2(0,L)} &\leq \langle w_{xx}, -\lambda w\rangle_{L^2(0,L)} - \sum_{j=1}^{\infty}\sigma_j w_j(t)^2 \\ &\leq \frac{||w_{xx}||^2_{L^2(0,L)}}{2} + \frac{\lambda^2\,||w||^2_{L^2(0,L)}}{2} - \sum_{j=1}^{\infty}\sigma_j w_j(t)^2,\end{aligned}$$

por las condiciones de borde que satisface el sistema (4.1), se tiene que

$$||w||^2_{H_0^2(0,L)} = ||w_{xx}||^2_{L^2(0,L)}\,.$$

Además, juntando este término con el de la izquierda y multiplicando por 2 se sigue que

$$\begin{aligned}||w||^2_{H_0^2(0,L)} &\leq \lambda^2\,||w||^2_{L^2(0,L)} - 2\sum_{j=1}^{n}\sigma_j w_j(t)^2 - 2\sum_{j=n+1}^{\infty}\sigma_j w_j(t)^2 \\ &\leq \lambda^2\sum_{j=1}^{\infty} w_j(t)^2 - 2\sum_{j=n+1}^{\infty}\sigma_j w_j(t)^2 \\ &= \lambda^2\sum_{j=1}^{n} w_j(t)^2 + \sum_{j=n+1}^{\infty}(\lambda^2 - 2\sigma_j) w_j(t)^2 \\ &= \lambda^2|z|^2 + \sum_{j=n+1}^{\infty}(\lambda^2 - 2\sigma_j) w_j(t)^2,\end{aligned}$$

donde usamos que $\sigma_j \geq 0$ para $j \leq n$.

Ahora, para $j \geq n+1$ se tiene $\sigma_j < 0$ y que $0 < -\sigma_{n+1} \leq -\sigma_j$, de donde se sigue que

$$0 < \lambda^2 - 2\sigma_j = -\sigma_j\left(2 - \frac{\lambda^2}{\sigma_j}\right) \leq -\sigma_j\left(2 - \frac{\lambda^2}{\sigma_{n+1}}\right).$$

De este modo, obtenemos la estimación

$$||w(t,\cdot)||^2_{H_0^2(0,L)} \leq C_2\left(|z|^2 - \sum_{j=n+1}^{\infty}\sigma_j w_j(t)^2\right),$$

donde

$$C_2 = \max\left\{\lambda^2, 2 - \frac{\lambda^2}{\sigma_{n+1}}\right\} > 0.$$

Así, logramos encontrar la estimación

$$-\sum_{j=n+1}^{\infty}\sigma_j w_j(t)^2 \geq \frac{||w(t,\cdot)||^2_{H_0^2(0,L)}}{C_2} - |z|^2\,. \tag{4.29}$$

Finalmente, para probar (4.24), note que como $\sigma_j < 0$ para $j \geq n+1$, se sigue de (4.28) que

$$\begin{aligned} V_2(t) &\geq C_1|z|^2 - C_1 \sum_{j=n+1}^{\infty} \sigma_j w_j(t)^2 \\ &\geq C_1|z|^2 - \frac{C_1}{2} \sum_{j=n+1}^{\infty} \sigma_j w_j(t)^2, \end{aligned} \tag{4.30}$$

utilizando la estimación (4.29), se sigue que

$$V_2(t) \geq C_1|z|^2 - \frac{C_1}{2} \sum_{j=n+1}^{\infty} \sigma_j w_j(t)^2 \tag{4.31}$$

$$\geq C_1|z|^2 + \frac{C_1 \, ||w||^2_{H_0^2(0,L)}}{2C_2} - \frac{C_1 \, |z|^2}{2} \tag{4.32}$$

$$= \frac{C_1}{2} |z|^2 + \frac{C_1}{2C_2} \, ||w||^2_{H_0^2(0,L)} \, , \tag{4.33}$$

lo que prueba el resultado. □

Lema 4.2.2. *Existe $\omega > 0$ tal que*

$$V_2(t) \leq e^{-\omega t} \, V_2(0), \qquad \forall t \geq 0.$$

Demostración. Para el sistema dado por $\dot{z}(t) = \mathbf{A}z(t) + \mathbf{B}\mathfrak{sat}(\mathbf{K}z)$, se sigue de la Proposición 4.1.3 que se satisface (4.22)

$$\dot{V}_1(t) \leq -\alpha|z|^2,$$

donde $-\alpha$ es el mayor valor propio de la matriz (4.20). Por otro lado, usando que A es autoadjunto se tiene que

$$\frac{d}{dt} \langle Aw, w \rangle_{L^2(0,L)} = 2 \langle Aw, w_t \rangle_{L^2(0,L)} \, , \tag{4.34}$$

entonces, de la ecuación (4.1) se sigue que

$$w_t = Aw + \sum_{k=1}^{m} b_k \cdot \mathfrak{sat}((\mathbf{K}z)_k),$$

por tanto, reemplazando esta expresión en (4.34) se tiene

$$\begin{aligned} -\frac{d}{dt} \langle Aw, w \rangle_{L^2(0,L)} &= -2 \left\langle Aw, Aw + \sum_{k=1}^{m} b_k \cdot \mathfrak{sat}((\mathbf{K}z)_k) \right\rangle_{L^2(0,L)} \\ &= -2 \, ||Aw||^2_{L^2(0,L)} - 2 \left\langle Aw, \sum_{k=1}^{m} b_k \cdot \mathfrak{sat}((\mathbf{K}z)_k) \right\rangle_{L^2(0,L)} . \end{aligned} \tag{4.35}$$

Usando nuevamente la desigualdad de Young con $p = q = 2$ y la desigualdad de Bessel para acotar la segunda parte de esta igualdad, se sigue que

$$\begin{aligned} -2 \left\langle Aw, \sum_{k=1}^{m} b_k \cdot \mathfrak{sat}((\mathbf{K}z)_k) \right\rangle_{L^2(0,L)} &\leq ||Aw||^2_{L^2(0,L)} + \left|\mathbf{b}_j\right|^2 \cdot \left|\mathfrak{sat}(\mathbf{K}z)\right|^2 \\ &\leq ||Aw||^2_{L^2(0,L)} + ||\mathbf{K}||^2 \sum_{k=1}^{m} ||b_k||^2_{L^2(0,L)} \, |z|^2, \end{aligned}$$

reemplazando esto en la desigualdad (4.35), tenemos que

$$\begin{aligned} -\frac{d}{dt}\langle Aw, w\rangle_{L^2(0,L)} &\leq -||Aw||^2_{L^2(0,L)} + ||\mathbf{K}||^2 \sum_{k=1}^{m} ||b_k||^2_{L^2(0,L)}|z|^2 \\ &= -\sum_{j=1}^{\infty} \sigma_j^2 w_j(t)^2 + ||\mathbf{K}||^2 \sum_{k=1}^{m} ||b_k||^2_{L^2(0,L)}|z|^2. \end{aligned} \tag{4.36}$$

Observación 4.2.2. *En el último paso apareció un término que es proporcional a σ_j^2, y lo que buscamos acotar tiene la forma*

$$\langle Aw, w\rangle_{L^2(0,L)} = \sum_{j=1}^{\infty} \sigma_j w_j(t)^2, \tag{4.37}$$

por tanto, el objetivo del siguiente desarrollo es estimar el término σ_j^2 para obtener un resultado proporcional a (4.37).

Note que para los valores propios $\{\sigma_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ tenemos las siguientes estimaciones

$$\begin{cases} \sigma_1 > \sigma_j \geq 0, & j \leq n \\ 0 > \sigma_{n+1} \geq \sigma_j, & j \geq n+1. \end{cases}$$

Entonces, si $j \geq n+1$ se tiene que

$$-\sigma_j \leq \frac{\sigma_j^2}{-\sigma_{n+1}}, \qquad \forall j \geq n+1, \tag{4.38}$$

y por tanto, tomando

$$M \geq -\frac{1}{\sigma_{n+1}}, \tag{4.39}$$

se tiene usando (4.39) junto con (4.38) que

$$\begin{aligned} M\,||Aw||^2_{L^2(0,L)} &= M\sum_{j=1}^{\infty} \sigma_j^2 w_j(t)^2 \\ &\geq M\sum_{j=n+1}^{\infty} \sigma_j^2 w_j(t) \\ &\geq -\frac{1}{\sigma_{n+1}} \sum_{j=n+1}^{\infty} \sigma_j^2 w_j(t)^2 \\ &\geq -\sum_{j=n+1}^{\infty} \sigma_j w_j(t)^2. \end{aligned}$$

Así, recordando que se tiene y $\sigma_j \geq 0$ para $j \leq n$ se sigue de la última línea que

$$-||Aw||^2_{L^2(0,L)} \leq \frac{1}{M}\sum_{j=n+1}^{\infty} \sigma_j w_j(t)^2 \leq \frac{1}{M}\sum_{j=1}^{\infty} \sigma_j w_j(t)^2. \tag{4.40}$$

Reuniendo las estimaciones de (4.40), (4.36) y (4.2.1), obtenemos que

$$\begin{aligned}\dot{V}_2(t) &= -\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\langle Aw, w\rangle_{L^2(0,L)} + \frac{M}{2}\dot{V}_1(t)\\ &\leq -\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{\infty}\sigma_j^2 w_j(t)^2 + \frac{\left(||\mathbf{K}||^2\sum_{k=1}^{m}||b_k||^2_{L^2(0,L)}\right)}{2}|z|^2 - \frac{\alpha M}{2}|z|^2\\ &= -\frac{1}{2}||Aw||^2_{L^2(0,L)} + \frac{\left(||\mathbf{K}||^2\sum_{k=1}^{m}||b_k||^2_{L^2(0,L)} - \alpha M\right)}{2}|z|^2\\ &\leq \frac{1}{2M}\sum_{j=1}^{\infty}\sigma_j w_j(t)^2 + \frac{\left(||\mathbf{K}||^2\sum_{k=1}^{m}||b_k||^2_{L^2(0,L)} - \alpha M\right)}{2}|z|^2.\end{aligned}$$

Dado que $\alpha > 0$ de la Proposición 4.1.3, podemos considerar

$$C_3 > \frac{1}{2\alpha}, \tag{4.41}$$

y en tal caso, podemos tomar M tal que

$$||\mathbf{K}||^2\sum_{k=1}^{m}||b_k||^2_{L^2(0,L)} - \alpha M < -\frac{M}{2C_3}, \tag{4.42}$$

para obtener la estimación

$$\dot{V}_2(t) \leq \frac{1}{2M}\sum_{j=1}^{\infty}\sigma_j w_j(t)^2 - \frac{M}{4C_3}|z|^2. \tag{4.43}$$

Observación 4.2.3. *De (4.41) y de la estimación (4.42), obtenemos la siguiente desigualdad*

$$0 < \frac{||\mathbf{K}||^2\sum_{k=1}^{m}||b_k||^2_{L^2(0,L)}}{\left(\alpha - \frac{1}{2C_3}\right)} < M,$$

que nos asegura que tal valor de $C_3 > 0$ es factible y no afecta al signo de M.

Por otro lado, note que de (4.25) se sigue que

$$-|z|^2 \leq -\frac{1}{\beta_{max}}z^\top \mathbf{P} z,$$

por lo que aplicando este resultado en (4.43), se sigue que

$$\begin{aligned}\dot{V}_2(t) &\leq \frac{1}{2M}\sum_{j=1}^{\infty}\sigma_j w_j(t)^2 - \frac{M}{4C_3}|z|^2\\ &\leq \frac{1}{2M}\sum_{j=1}^{\infty}\sigma_j w_j(t)^2 - \frac{1}{2C_3\beta_{max}}\frac{M}{2}|z|^2.\end{aligned}$$

Finalmente, considerando $M \geq 2C_3\beta_{max}$, obtenemos que

$$\begin{aligned}\dot{V}_2(t) &\leq \frac{1}{2M}\sum_{j=1}^{\infty}\sigma_j w_j(t)^2 - \frac{1}{2C_3\beta_{max}}\frac{M}{2}|z|^2 \\ &\leq \frac{1}{2C_3\beta_{max}}\left(\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{\infty}\sigma_j w_j(t)^2 - \frac{M}{2}z^\top \mathbf{P} z\right) \\ &= -\frac{1}{2C_3\beta_{max}}\left(-\frac{1}{2}\langle Aw, w\rangle_{L^2(0,L)} + \frac{M}{2}V_1(t)\right) \\ &= -\frac{1}{2C_3\beta_{max}}V_2(t).\end{aligned}$$

Lo que concluye el resultado con

$$\omega = \frac{1}{2C_3\beta_{max}}.$$

□

Lema 4.2.3. *Existe $C_4 > 0$ tal que*

$$V_2(0) \leq C_4||w_0||^2_{H_0^2(0,L)}.$$

Demostración. Observe que de la definición del operador A en (2.1), usando integraciones por parte, la desigualdad (4.25), la desigualdad de Poincaré [9, Sección 5.8.1] y que

$$|z|^2 \leq ||w||^2_{L^2(0,L)},$$

se obtiene la siguiente estimación

$$\begin{aligned}V_2(t) &= -\frac{1}{2}\langle Aw, w\rangle_{L^2(0,L)} + \frac{M}{2}V_1(t) \\ &\leq \frac{1}{2}||w_{xx}||^2_{L^2(0,L)} - \frac{1}{2}||w_x||^2_{L^2(0,L)} + \frac{M\beta_{max}}{2}|z|^2 \\ &\leq \frac{1}{2}||w||^2_{H_0^2(0,L)} + \frac{M\beta_{max}}{2}||w||^2_{L^2(0,L)} \\ &\leq \frac{\left(1 + M\beta_{max}C_p^2\right)}{2}||w||^2_{H_0^2(0,L)}.\end{aligned}$$

Donde C_p denota la constante de Poincaré. Finalmente, tomando $t = 0$ se sigue que

$$V_2(0) \leq \frac{\left(1 + M\beta_{max}C_p^2\right)}{2}||w_0||^2_{H_0^2(0,L)},$$

probando el resultado con

$$C_4 = \frac{1 + M\beta_{max}C_p^2}{2}.$$

□

4.2.2 Resultado principal

Teorema 4.2.1. *Asuma que las hipótesis del Teorema (4.1.1) son válidas. Considere w solución de (4.1), z definido en (4.3) y las constantes*

$$\begin{aligned}
C_1 &= \min\left\{\frac{M\beta_{min}-\sigma_1}{2}, \frac{1}{2}\right\},\\
C_2 &= \max\left\{\lambda^2, 2-\frac{\lambda^2}{\sigma_{n+1}}\right\},\\
C_3 &> \frac{1}{2\alpha},\\
C_4 &= \frac{1+M\beta_{max}C_p^2}{2},\\
M &> \max\left\{\frac{\sigma_1}{\beta_{min}}, -\frac{1}{\sigma_{n+1}}, 2C_3\beta_{max}\right\}
\end{aligned}$$

Entonces, se satisface que

$$||w||^2_{H_0^2(0,L)} \leq \frac{2C_2C_4}{C_1}e^{-\omega t}\,||w_0||^2_{H_0^2(0,L)},$$

con tasa de decaimiento

$$\omega = \frac{1}{2C_3\beta_{max}}.$$

Demostración. En virtud de los Lemas 4.2.1, 4.2.2 y 4.2.3, se sigue que

$$\begin{aligned}
\frac{C_1}{2}|z|^2 + \frac{C_1}{2C_2}||w||^2_{H_0^2(0,L)} &\leq V_2(t)\\
&\leq e^{-\omega t}\,V_2(0)\\
&\leq C_4e^{-\omega t}\,||w_0||^2_{H_0^2(0,L)},
\end{aligned}$$

lo que concluye el resultado, pues dado que $|z|^2 \geq 0$ se sigue que

$$||w||^2_{H_0^2(0,L)} \leq \frac{2C_2C_4}{C_1}e^{-\omega t}\,||w_0||^2_{H_0^2(0,L)},$$

donde ω se obtiene en la demostración del Lema 4.2.2. □

5 Conclusiones y trabajos futuros

En este trabajo estudiamos el sistema

$$\begin{cases} w_t + w_{xxxx} + \lambda w_{xx} = v, & (t,x) \in (0,+\infty) \times (0,L), \\ w(t,0) = w(t,L) = 0, & t \in (0,+\infty), \\ w_x(t,0) = w_x(t,L) = 0, & t \in (0,+\infty), \\ w(0,x) = w_0(x), & x \in (0,L). \end{cases}$$

donde el control v podía tomar la forma de un control escalar, como en el primer problema, o como el producto de un vector de localizaciones con un control saturado por componentes, como en el segundo problema.

En la primera parte de este documento, trabajamos sobre un control escalar y estabilizamos el sistema escogiendo ganancias del control tipo feedback, apropiadas para estabilizar los valores propios no negativos. Esta tasa de decaimiento se escoge de manera uniforme, obteniendo un resultado de estabilización rápida. En este desarrollo no mostramos la controlabilidad del par $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$.

En la segunda parte, trabajamos considerando controles saturados y localizaciones. Luego de identificar los distintos espacios de estados y el sistema en cascada, desarrollamos los espacios funcionales apropiados donde estos sistemas viven. Utilizando nuevamente un control de tipo feedback, vemos cómo este problema generaliza al anterior, esta vez dando una demostración de la controlabilidad del par $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$. Mediante propiedades geométricas de las saturaciones y usando técnicas de LMI, se prueba un resultado de estabilidad para la norma $||\cdot||_{L^2(0,L)}$, que luego se extiende a otro desarrollo donde probamos la estabilidad para la norma $||\cdot||_{H_0^2(0,L)}$.

Los resultados de este trabajo se pueden resumir en

1. Resultado de estabilización rápida para la ecuación de Kuramoto-Sivashinsky lineal con control interno.
2. Resultado de estabilización exponencial para la norma $||\cdot||_{L^2(0,L)}$ en presencia de controles saturados localizados, para la ecuación de Kuramoto-Sivashinsky.
3. Resultado de estabilización para la norma $||\cdot||_{H_0^2(0,L)}$ en presencia de controles saturados localizados, para la ecuación de Kuramoto-Sivashinsky.

La extensión natural del segundo problema es ver si podemos estabilizar el sistema con la no linealidad ww_x incluida. En la literatura uno puede encontrar trabajos de este tipo como en [22], donde utilizando el argumento de *compactness-uniqueness* terminan probando un resultado de estabilización global de la norma $||\cdot||_{L^2(0,L)}$ para la ecuación de Korteweg-De Vries no lineal.

En [26] se estudia la ecuación de Kawahara no lineal, obteniendo resultados de estabilidad para la norma $||\cdot||_{L^2(0,L)}$. En [25] se prueban resultados de estabilidad para la norma $||\cdot||_{L^2(0,L)}$ en presencia de controles saturados en la condición de frontera $w_x(t,L)$. Con estos antecedentes y considerando como referencia el capítulo sobre estabilización usando controles saturados con localizaciones para ecuaciones parabólicas [18], creo que es posible estudiar los siguientes trabajos futuros.

1. Estabilización de las normas $||\cdot||_{L^2(0,L)}$, $||\cdot||_{H_0^1(0,L)}$ y $||\cdot||_{H_0^2(0,L)}$ de la ecuación de Kuramoto-Sivashinsky no lineal, utilizando controles saturados localizados.

2. Estabilización de la norma $||\cdot||_{L^2(0,L)}$ de la ecuación de Kuramoto-Sivashinsky no lineal, utilizando un control saturado en una condición de frontera.

Otra alternativa es buscar un resultado de estabilidad del tipo *Output-Feedback*, es decir, agregando una observación al sistema. En [16], se estudia la estabilización de la ecuación de Kuramoto-Sivashinsky no lineal con condiciones de frontera

$$\begin{cases} w(t,0) = u(t) \\ w(t,L) = w_{xx}(t,0) = w_{xx}(t,L) = 0 \end{cases}$$

donde se obtiene un resultado de estabilidad para la norma $||\cdot||_{H^2(0,L)}$. Es importante mencionar que en este trabajo la no linealidad se incorpora en los argumentos de LMI mediante matrices aumentadas y que se entregan resultados incluso para casos donde existan valores propios repetidos, por lo que el tercer caso que comentamos en el supuesto (4.1.1) es un argumento a considerar.

Por otro lado, en [19] se estudia una ecuación de reacción-difusión en presencia de controles saturados localizados, similar al desarrollo del segundo problema de este documento. En este trabajo obtienen un resultado de estabilización de tipo *Output-Feedback* y logran posicionar la saturación dentro de las matrices aumentadas por los argumentos de LMI. El resultado es la estabilización de las normas $||\cdot||_{L^2(0,L)}$ y $||\cdot||_{H^1(0,L)}$. Por estos dos trabajos anteriores, creo que otro posible trabajo futuro es (considerando las mismas condiciones de borde de los problemas abarcados en este documento),

3. Estabilización de tipo *Output-Feedback* para la ecuación de Kuramoto-Sivashinsky no lineal en presencia de controles saturados localizados, tanto para la norma $||\cdot||_{L^2(0,L)}$ como la norma $||\cdot||_{H^2(0,L)}$.

Finalmente, sería interesante obtener resultados de *well-possedness* para los sistemas (3.1) y (4.1). Una vez hecho, el siguiente objetivo sería buscar un resultado de estabilidad para la ecuación de Kuramoto-Sivashinsky lineal en n dimensiones espaciales y también lograr implementar numéricamente los resultados para el segundo problema. Para esto, una buena referencia es [24] donde podemos encontrar los resultados de la implementación numérica de la región de atracción con los respectivos flujos de soluciones en el plano de fase y también el código utilizado.

Bibliografía

[1] Stephen Boyd. *Linear matrix inequalities in system and control theory*. Society for Industrial & Applied, Jan. 1994.

[2] Stephen Boyd and Lieven Vandenberghe. *Convex optimization*. Cambridge University Press, Mar. 2004.

[3] Haim Brezis. *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*. Universitext. Springer New York, 2010. ISBN: 9780387709130.

[4] Julien Calbert, Lucas Egidio, and Raphaël Jungers. "An efficient method to verify the inclusion of ellipsoids". In: *IFAC-PapersOnLine* 56.2 (Jan. 2023), pp. 1958–1963. DOI: 10.1016/j.ifacol.2023.10.1088.

[5] Eduardo Cerpa. "Null controllability and stabilization of the linear Kuramoto-Sivashinsky equation". In: *Communications on Pure and Applied Analysis* 9.1 (Jan. 2010), pp. 91–102. DOI: 10.3934/cpaa.2010.9.91.

[6] Jean-Michel Coron. *Control and nonlinearity*. American Mathematical Soc., Jan. 2007.

[7] Jean-Michel Coron and Emmanuel Trélat. "Global steady-state controllability of one-dimensional semilinear heat equations". In: *Siam Journal on Control and Optimization* 43.2 (Jan. 2004), pp. 549–569. DOI: 10.1137/s036301290342471x.

[8] Jean-Michel Coron and Emmanuel Trélat. "Global steady-state stabilization and controllability of 1d semilinear wave equations". In: *Communications in Contemporary Mathematics* 08.04 (Aug. 2006), pp. 535–567. DOI: 10.1142/s0219199706002209.

[9] Lawrence Evans and American Mathematical Society. *Partial Differential Equations*. Graduate studies in mathematics. American Mathematical Society, 1998. ISBN: 9780821807729.

[10] Patricio Guzmán, Swann Marx, and Eduardo Cerpa. "Stabilization of the linear Kuramoto-Sivashinsky equation with a delayed boundary control". In: *IFAC-PapersOnLine* 52.2 (Jan. 2019), pp. 70–75. DOI: 10.1016/j.ifacol.2019.08.013.

[11] Patricio Guzmán and Christophe Prieur. "Rapid stabilization of a reaction-diffusion equation with distributed disturbance". In: *2020 59th IEEE Conference on Decision and Control (CDC)*. 2020, pp. 666–671. DOI: 10.1109/CDC42340.2020.9304185.

[12] Birgit Jacob and Hans Zwart. "Equivalent conditions for stabilizability of infinite-dimensional systems with admissible control operators". In: *Siam Journal on Control and Optimization* 37.5 (Jan. 1999), pp. 1419–1455. DOI: 10.1137/s036301299833344x.

[13] Rami Katz and Emilia Fridman. "Global stabilization of a 1D semilinear heat equation via modal decomposition and direct Lyapunov approach". In: *Automatica* 149 (Mar. 2023), p. 110809. DOI: 10.1016/j.automatica.2022.110809.

[14] Rami Katz and Emilia Fridman. "Regional stabilization of the 1-D Kuramoto–Sivashinsky equation via modal decomposition". In: *IEEE Control Systems Letters* 6 (Jan. 2022), pp. 1814–1819. DOI: 10.1109/lcsys.2021.3133492.

[15] Yoshiki Kuramoto and Takuya Tsuzuki. *On the formation of dissipative structures in reaction-diffusion systems: reductive perturbation approach*. Progress of Theoretical and Experimental Physics, 54(3), 687–699., 1975.

[16] Hugo Lhachemi. "Local output feedback stabilization of a nonlinear Kuramoto–Sivashinsky equation". In: *IEEE Transactions on Automatic Control* 68.12 (2023), pp. 8165–8170. DOI: 10.1109/TAC.2023.3293722.

[17] Hugo Lhachemi, Ionuţ Munteanu, and Christophe Prieur. "Boundary output feedback stabilisation for 2-D and 3-D parabolic equations". In: *arXiv (Cornell University)* (Feb. 2023). DOI: 10.48550/arxiv.2302.12460.

[18] Hugo Lhachemi and Christophe Prieur. "Feedback stabilization of a class of diagonal Infinite-Dimensional systems with delay boundary control". In: *IEEE Transactions on Automatic Control* 66.1 (Jan. 2021), pp. 105–120. DOI: 10.1109/tac.2020.2975003.

[19] Hugo Lhachemi and Christophe Prieur. "Local output feedback stabilization of a Reaction–Diffusion equation with saturated actuation". In: *IEEE Transactions on Automatic Control* 68.1 (Jan. 2023), pp. 564–571. DOI: 10.1109/tac.2022.3144609.

[20] Hugo Lhachemi and Christophe Prieur. *Saturated boundary stabilization of partial differential equations using Control-Lyapunov functions*. Mar. 2023, pp. 81–164. DOI: 10.1142/9789811271632\{_}0002.

[21] Tucsnak Marius and George Weiss. *Observation and Control for Operator Semigroups*. Vol. 11. Jan. 2009. ISBN: 9783764389932. DOI: 10.1007/978-3-7643-8994-9.

[22] Swann Marx et al. "Global stabilization of a Korteweg-de Vries equation with a distributed control saturated in L^2-norm". In: *IFAC-PapersOnLine* 49.18 (2016). 10th IFAC Symposium on Nonlinear Control Systems NOLCOS 2016, pp. 122–127. ISSN: 2405-8963. DOI: https://doi.org/10.1016/j.ifacol.2016.10.150.

[23] Gabriel Perla Menzala, Carlos Frederico Vasconcellos, and Enrique Zuazua. "Stabilization of the Korteweg-de Vries equation with localized damping". In: *Quarterly of Applied Mathematics* 60.1 (Mar. 2002), pp. 111–129. DOI: 10.1090/qam/1878262.

[24] Andrii Mironchenko, Christophe Prieur, and Fabian Wirth. "Local Stabilization of an unstable parabolic equation via saturated controls". In: *IEEE Transactions on Automatic Control* 66.5 (2021), pp. 2162–2176. DOI: 10.1109/TAC.2020.3007733.

[25] Hugo Parada. "Stability analysis of a Korteweg-de Vries equation with saturated boundary feedback". In: *IFAC-PapersOnLine* 55.26 (Jan. 2022), pp. 1–6. DOI: 10.1016/j.ifacol.2022.10.368.

[26] Hugo Parada and Subrata Majumdar. "Stabilization of Kawahara equation with input saturation and saturated boundary feedback". In: *⟨hal-04314431⟩* (2023).

[27] Ademir Pazoto. "Unique continuation and decay for the Korteweg-de Vries equation with localized damping". In: *ESAIM: Control, Optimisation and Calculus of Variations* 11.3 (July 2005), pp. 473–486. DOI: 10.1051/cocv:2005015.

[28] Friedrich Pukelsheim. "Optimal design of experiments". In: *Choice Reviews Online* 31.02 (Oct. 1993), pp. 31–0986. DOI: 10.5860/choice.31-0986.

[29] David L. Russell. "Controllability and stabilizability theory for linear partial differential equations: recent progress and open questions". In: *Siam Review* 20.4 (Oct. 1978), pp. 639–739. DOI: 10.1137/1020095.

[30] Bryan Rynne and Martin Youngson. *Linear functional analysis*. Springer, Dec. 2007.

[31] Sandro Salsa. *Partial differential equations in action*. Springer, Oct. 2016.

[32] Gregory Sivashinsky. *Nonlinear analysis of hydrodynamic instability in laminar flames—I. Derivation of basic equations*. Acta Astronautica, 4(11–12), 1177–1206., 1977.

[33] Eduardo Sontag. "Mathematical Control Theory". In: *Texts in applied mathematics* (Jan. 1998). DOI: 10.1007/978-1-4612-0577-7.

[34] Sophie Tarbouriech. *Stability and stabilization of linear systems with saturating actuators*. Jan. 2011. DOI: 10.1007/978-0-85729-941-3.

[35] Walter Wallis. *A Beginner's Guide to Discrete Mathematics*. Jan. 2012. DOI: 10.1007/978-0-8176-8286-6.