Parametrices y continuidad L^2

Felipe Labra Irribarra

28 de Noviembre de 2024

Contenidos

1. Operadores elípticos y parametrices
2. Continuidad L^2
3. Espacios de Sobolev y ΨDOs
4. Operadores de Dirac

Contents

1. Operadores elípticos y parametrices
2. Continuidad L^2
3. Espacios de Sobolev y ΨDOs
4. Operadores de Dirac

Conceptos previos

Objetivo: Construir inversas para operadores elípticos a partir de las reglas de cálculo para símbolos.

Definición: Operador elíptico

Sea $P \in \Psi^m(X)$ con símbolo completo $p \in S^m(X \times \mathbb{R}^n)$, es decir, $\mathrm{Op}(p) = P$. Diremos que P es elíptico o no característica en $(x_0, \xi_0) \in X \times \dot{\mathbb{R}}^n$ si existe una vecindad cónica V de (x_0, ξ_0) y $C > 0$ tal que

$$|p(x,\xi)| \geq \frac{1}{C}\left(1 + |\xi|\right)^m, \qquad (x,\xi) \in V, \quad |\xi| \geq C.$$

Diremos que P es elíptico en $x_0 \in X$ si P es elíptico en (x_0, ξ) para todo $\xi \in \dot{\mathbb{R}}^n$. De la misma forma, diremos que P es elíptico si lo es para todo $x \in X$.

Ejemplos de operadores elípticos

1. $P(x,D) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\partial_{x_i}\partial_{x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(x)\partial_{x_i} + c(x)$ cumple $P \in \Psi^m(X)$ con símbolo principal

$$p(x,\xi) = -\sum_{i,j}^{n} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j$$

   Se sigue que P es elíptico si y solo si la matriz $(a_{ij}(x))_{ij}$ es definida positiva es definida positiva en todo X.

2. El laplaciano fraccionario $(-\Delta)^\alpha$ con $\alpha \in (0,1)$ tiene símbolo $|\xi|^{2\alpha}$, por tanto $(-\Delta)^\alpha \in \Psi^{2\alpha}(\mathbb{R}^n)$ y es elíptico en $\mathbb{R}^n$.

Teorema

Si $P \in \Psi^m(X)$ es elíptico, entonces existe $Q \in \Psi^{-m}(X)$ propiamente soportado tal que

$$P \circ Q \equiv Q \circ P \equiv I, \qquad \text{mod } \Psi^{-\infty}(X).$$

Más aún, Q es única modulo $\Psi^{-\infty}(X)$. Diremos que Q es una parametriz de A si satisface la condición anterior.

Definición

Diremos que $A \in \Psi^m(\mathbb{R}^n)$ es elíptico si su símbolo principal, $\sigma_m(A)$, es elíptico, donde

$$\sigma_m(A) := [\sigma_L(A)] \in S^m(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n)/S^{m-1}(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n).$$

Corolario

Sea $P \in \Psi^m(X)$ operador elíptico y propiamente soportado. Entonces se cumple que

1. $P : \mathcal{D}'(X)/C^\infty(X) \to \mathcal{D}'(X)/C^\infty(X)$,
2. Para $u \in \mathcal{D}'(X)$, tenemos que sing supp$(Pu) =$ sing supp(u). En particular, obtenemos el siguiente resultado de regularidad elíptica: Si $u \in \mathcal{D}'(X)$ es tal que $Pu \in C^\infty(X)$, entonces $u \in C^\infty(X)$.

Algunas observaciones al respecto:

1. Diremos que un operador pseudodiferencial P es hipoelíptico si $Pu \in C^\infty(X)$ implica que $u \in C^\infty(X)$. Es posible probar que el operador de calor $\partial_t - \Delta$ es hipoelíptico (pero claramente no es elíptico!)
2. La idea para más adelante es probar un resultado más preciso de regularidad pero en el lenguaje de *wavefront sets*.

Contents

1. Operadores elípticos y parametrices
2. Continuidad L^2
3. Espacios de Sobolev y ΨDOs
4. Operadores de Dirac

Objetivo: Estudiar propiedades de mapeos de operadores $\Psi^0(X)$ en L^2, para luego generalizar a espacios de Sobolev.

Teorema (Continuidad L^2 para ΨDOs

Sea $A \in \Psi^0(\mathbb{R}^n)$ con $K_A \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$. Defina

$$M := \limsup_{|\xi| \to \infty} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |\sigma_A(x, \xi)| .$$

Entonces $A : L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$ es continuo y para todo $\varepsilon > 0$, podemos encontrar una descomposición $A = A_\varepsilon + K_\varepsilon$ donde $\|A_\varepsilon\|_{L^2 \to L^2} \leq M + \varepsilon$ y $K_\varepsilon \in \Psi^{-\infty}(\mathbb{R}^n)$. Además, tenemos que $\operatorname{supp}(K_{A_\varepsilon}) \subset \operatorname{supp}(K_A) + B(0, \varepsilon)$.

Contents

1. Operadores elípticos y parametrices
2. Continuidad L^2
3. Espacios de Sobolev y ΨDOs
4. Operadores de Dirac

Objetivo: Extender la continuidad L^2 de ΨDOs a continuidad entre espacios de Sobolev.

Definición:

Para cada $s \in \mathbb{R}$, definimos el espacio de Sobolev $H^s(\mathbb{R}^n)$ como

$$H^s(\mathbb{R}^n) := \{u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \mid \hat{u}(\xi)(1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}} \in L^2(\mathbb{R}^n)\},$$

con producto interno

$$(u,v)_{H^s(\mathbb{R}^n)} := (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} (1+\xi|^2)\hat{u}(\xi)\overline{\hat{v}(\xi)}d\xi.$$

Aemás, recuperamos las siguientes propiedades para espacios de Sobolev

Contents

1. Operadores elípticos y parametrices
2. Continuidad L^2
3. Espacios de Sobolev y ΨDOs
4. Operadores de Dirac

Operadores de Dirac

Proposición

1. $H^s(\mathbb{R}^n)$ es un espacio de Hilbert con el producto interno definido anteriormente. Además, $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset H^s(\mathbb{R}^n)$ es denso.
2. $H^s(\mathbb{R}^n) \subset H^t(\mathbb{R}^n)$ para $s > t$. Más aún, esta inyección es compacta.
3. Existe un producto en dualidad no degenerado que extiende al producto en dualidad en $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \times \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$:

$$H^s(\mathbb{R}^n) \times H^{-s}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{C}, \quad (u, v) := \int_{\mathbb{R}^n} u(x)v(x)dx,$$

   el cual entrega un isomorfismo isométrico $H^{-s}(\mathbb{R}^n) = (H^s(\mathbb{R}^n))^*$.
4. Para $m \in \mathbb{N}$, tenemos una definición alternativa para los espacios de Sobolev

$$H^m(\mathbb{R}^n) = \{u \in D'(\mathbb{R}^n) \mid D^\alpha u \in L^2(\mathbb{R}^n), \quad \forall |\alpha| \leq m\}.$$

   En particular, la noram $\|u\|_{H^m}$ es equivalente a la noram

Proposición

1. Sea $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ y $s \in \mathbb{R}$. Entonces el mapeo multiplicación

$$M_\varphi : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^n), \quad M_\varphi(u) = \varphi u,$$

se entiende continuamente a un mapeo $M_\varphi : H^s(\mathbb{R}^n) \to H^s(\mathbb{R}^n)$. Esto implica que un operador diferencial P de orden m con coeficientes constantes o coeficientes en $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ es continuo $P : H^s(\mathbb{R}^n) \to H^{s-m}(\mathbb{R}^n)$.

2. Para $s, \ell \in \mathbb{R}$, el operador $(1-\Delta)^{\frac{\ell}{2}} := \mathrm{Op}((1+|\xi|^2)^{\frac{\ell}{2}} : H^s(\mathbb{R}^n) \to H^{s-\ell}(\mathbb{R}^n)$ es un isomorfismo isométrico.

Teorema

Sea $A \in \Psi^m(X)$ propiamente soportado y sea $s \in \mathbb{R}$. Entonces A es un operador continuo como mapeos

1. $A : H^s_{loc}(X) \to H^{s-m}_{loc}(X)$
2. $A : H^s_{comp}(X) \to H^{s-m}_{comp}(X)$.

Si A es elípitico, entonces para toda $u \in \mathcal{D}'(X)$, se tiene la propiedad de regularidad elíptica cuanlitativa

$$u \in H^s_{loc}(X) \iff Au \in H^{s-m}_{loc}(X)$$

Observación

Si $A \in \Psi^m(X)$ no se asume propiamente soportado, se puede probar que $A : H^s_{comp}(X) \to H^{s-m}_{loc}(X)$ es continua. (Similar a las propiedades de extensión para operadores pseudodiferenciales).

Corolario (Estimaciones elípticas cuantitativas)

Sea A un operador diferencial elíptico de orden m con coeficientes suaves. Entonces para todo $K \subset X$ compacto, $s \in \mathbb{R}$ y $N \in \mathbb{Z}$, existe $C = C_{K,s,N} > 0$ tal que

$$\|u\|_{H^{s+m}} \leq C(\|Au\|_{H^s} + \|u\|_{H^{-N}}), \quad \forall u \in H^{s+m}(K).$$