Sobre el soporte de MDM y bicaracterísticas

Felipe Labra Irribarra

Seminario de Análisis Microlocal.

5 de mayo de 2026

Contents

1. Resultados previos

2. Teorema principal sobre soporte MDM

Contents

1 Resultados previos

2 Teorema principal sobre soporte MDM

Teorema de propagación de la MDM

Theorem (Teorema A.6.)

Sea P un operador diferencial de orden m sobre Ω con $P^* = P$ y sea $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión acotada en $L^2_{loc}(\Omega)$ que converge débil a 0, a la que asociamos una medida de defecto microlocal μ. Suponga que $\{Pu_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge fuerte a 0 en $H^{1-m}_{loc}(\Omega)$. Entonces para todo $a \in C^\infty(\Omega \times \mathbb{R}^d \setminus \{0\})$ homogéneo de grado $1-m$ en la segunda variable y con soporte compacto en la primera variable,

$$\int_{\Omega \times S^{d-1}} \{a, p\}(x, \xi) d\mu(x, \xi) = 0. \tag{1}$$

Idea: Invarianza bajo el flujo Hamiltoniano asociado al símbolo principal de P.

Resultado previo

Theorem (Teorema A.7)

Sea X un espacio localmente compacto y Hausdorff. Sea μ una medida de Radon positiva en X.

1. *Sea N la unión de todos los abiertos $U \subset X$ tales que $\mu(U) = 0$. Entonces N es abierto y $\mu(N) = 0$. Definimos como $\text{supp}(\mu)$ al complemento de N.*
2. *$x \in \text{supp}(\mu)$ si y solo si $\int_X f d\mu > 0$ para toda $f \in C_0(X)$ tal que $f(x) > 0$.*

Idea de la Dem: La primera parte es clara. Para la segunda, podemos interpretarlo como

$$\langle \mu, f \rangle_{\mathcal{M}(X), C_0(X)} > 0, \quad \forall f \in C_0(X).$$

La parte difícil de la demostración es usar el lema de Urysohn.

Teorema sobre el soporte de la MDM

Theorem (Teorema A.9)

Sea P un operador diferencial de orden m sobre Ω y sea $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión acotada en $L^2_{loc}(\Omega)$ que converge débil a 0 a la que asociamos una medida de defecto microlocal μ. Entonces las siguientes propiedades son equivalentes:

1. $Pu_n \to 0$ *fuerte en* $H^{-m}_{loc}(\Omega)$ *donde* $m > 0$,
2. $\operatorname{supp}(\mu) \subset \{(x,\xi) \in \Omega \times S^{d-1} : \sigma_m(P)(x,\xi) = 0\}$.

Idea: Recuperar una mejor noción de la idea de MDM: $\mu = 0 \iff u_n \to u$.

Contents

1 Resultados previos

2 Teorema principal sobre soporte MDM

Theorem (Teorema A.10)

Sea P un operador diferencial autoadjunto de orden m en Ω y sea $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset L^2_{loc}(\Omega)$ una sucesión acotada que converge débil a 0, con medida de defecto microlocal μ. Suponga que Pu_n converge a 0 en $H^{-(m-1)}_{loc}(\Omega)$. Entonces el soporte de μ, $\operatorname{supp}(\mu)$ es una unión de curvas del tipo $s \in I \mapsto \left(x(s), \frac{\xi(s)}{|\xi(s)|}\right)$ donde $s \in I \mapsto (x(s), \xi(s))$ es una bicaracterística nula de p, donde p es el símbolo principal de P.

Plan de la demostración:

Mostraremos las dos contenciones. El Teorema A.9 asegura que, bajo las hipótesis, $\text{supp}(\mu)$ está contenido en la unión de bicaracterísticas de velocidad 1.
La parte difícil es la otra contención, que mostramos por contradicción. Se reduce a lo siguiente.

1. Queremos mostrar que si para una bicaracterística nula existe $s_0 \in I$ tal que $(x(s_0), \xi(s_0)/|\xi(s_0)) \in \text{supp}(\mu)$, entonces la contención se tiene para todo $s \in I$.
2. Reducir el problema anterior a uno local. Por conexidad de I, basta probar que el conjunto de valores $s \in I$ que satisfacen los anterior es clopen.
3. Ver que es cerrado es fácil. Ver que es abierto se demuestra por contradicción: Para $s_0 \in I$, $\gamma(s_0) \in \text{supp}(\mu)$ pero para todo $\varepsilon > 0$, existe $s^* \in (s_0 - \varepsilon, s_0 + \varepsilon) \cap I$ tal que $\gamma(s^*) \notin \text{supp}(\mu)$.
4. Construir una bicaracterística que sea constante bajo $H_p(\cdot)$ y que conecte $(x(s_0), \xi(s_0)/|\xi(s_0)|)$ con $(x(s_0^*), \xi(s_0^*)/|\xi(s_0^*)|)$, lo que será una contradicción.

Demostración pt. 1: Comentarios previos

Considere la función $q(x,\xi) = |\xi|^{1-m} p(x,\xi)$ suave sobre $\Omega \times (\mathbb{R}^d \setminus \{0\})$ y que es homogéneo de grado 1 en ξ.

Dado que las bicaracterísticas nulas de q son solamente reparametrizaciones de las bicaracterísticas nulas de p. Por tanto, es suficiente probar que $\operatorname{supp}(\mu)$ es una unión de curvas del tipo $s \in I \mapsto \left(x(s), \frac{\xi(s)}{|\xi(s)|}\right)$ donde $s \in I \mapsto (x(s), \xi(s))$ es una bicaracterística nula de q.

comencemos por notar que $\Omega \times S^{d-1}$ está cubierto por bicaracterísticas de q, que son las curvas integrales del Hamiltoniano H_q. Esto es porque el flujo está definido en todo $\Omega \times S^{d-1}$, por lo que para cada punto (x_0, ξ_0), existe una curva integral que pasa por el punto. Dado que la inclusión $H^{1-m}_{loc}(\Omega) \hookrightarrow H^{-m}_{loc}(\Omega)$ es continua, el Teorema A.9 nos dice que $\operatorname{supp}(\mu) \subseteq p^{-1}(0) = q^{-1}(0)$.

Demostración pt. 2: Primera contención.

Demostraremos el contrarrecíproco. Sea $s \in I \mapsto (x(s), \xi(s))$ una bicaracterística en $\Omega \times (\mathbb{R}^d \setminus \{0\})$ en donde q nunca se anula. La homogeneidad de q en ξ nos dice que $q(x(s), \xi(s)/|\xi(s)|) \neq 0$ para todo $s \in I$. De este modo, la curva $s \in I \mapsto (x(s), \xi(s)/|\xi(s)|)$ nunca toca $\text{supp}(\mu)$, lo que prueba la contención.

Demostración pt. 3: Reducción local

Para completar la demostración, veremos la otra contención. Debemos probar que si para una bicaracterística nula q existe $s_0 \in I$ tal que $\left(x(s_0), \frac{\xi(s_0)}{|\xi(s_0)|}\right) \in \text{supp}(\mu)$, entonces la curva vive en el soporte para todo $s \in I$.

El primer paso es notar que basta probar la versión local de lo anterior. Note que el conjunto

$$A = \left\{ s \in I : \left(x(s), \frac{\xi(s)}{|\xi(s)|}\right) \in \text{supp}(\mu) \right\},$$

es cerrado en I. Queremos ver que A es abierto en I, es decir, que para cada $s_0 \in A$, existe $\varepsilon > 0$ tal que $\left(x(s), \frac{\xi(s)}{|\xi(s)|}\right) \in \text{supp}(\mu)$ para todo $s \in (s_0 - \varepsilon, s_0 + \varepsilon) \cap I$, en cuyo caso tendremos que $A = I$ si A es no vacío por conexidad de I.

Por los comentarios anteriores, la demostración se reduce a probar que para cada $s_0 \in I$ tal que $\left(x(s_0), \frac{\xi(s_0)}{|\xi(s_0)}\right) \in \text{supp}(\mu)$, entonces existe $\varepsilon > 0$ de modo que $\left(x(s_0), \frac{\xi(s_0)}{|\xi(s_0)}\right) \in \text{supp}(\mu)$ para todo $s \in (s_0 - \varepsilon, s_0 + \varepsilon) \cap I$.

Demostración pt. 4: Inicio de la contradicción

Usaremos contradicción. Suponga que para $s_0 \in I$ se tiene que $\left(x(s_0), \frac{\xi(s_0)}{|\xi(s_0)}\right) \in \text{supp}(\mu)$ y que para todo $\varepsilon > 0$ existe $s^* \in (s_0 - \varepsilon, s_0 + \varepsilon) \cap I$ tal que $\left(x(s^*), \frac{\xi(s^*)}{|\xi(s^*)}\right) \notin \text{supp}(\mu)$. Sin pérdida de generalidad, asumiremos que $s^* \in (s_0, s_0 + \varepsilon)$.

Sea $(x_0, \xi_0) = (x(s_0), \xi(s_0))$ y $(x_0^*, \xi_0^*) = (x(s^*), \xi(s^*))$. Por la propiedad de flujo, se tiene que para la bicaracterística $(x(s, x, \xi), \xi(s, x, \xi))$ que satisface $(x(0, x, \xi), \xi(0, x, \xi)) = (x, \xi)$, se cumple que

$$(x_0^*, \xi_0^*) = (x(s^* - s_0, x_0, \xi_0), \xi(s^* - s_0, x_0, \xi_0)), \quad (x_0, \xi_0) = (x(s_0 - s^*, x_0^*, \xi_0^*), \xi(s_0 - s^*,$$

Dado que solo estamos trabajando de manera local, podemos asumir que estamos trabajando en una componente conexa de Ω. Escogiendo $\varepsilon > 0$ suficientemente chico, podemos asumir que $x_0^* \in B(x_0, r) \subset B[x_0, 4r] \subset \Omega$ y que la características a través de los puntos del compacto $B[x_0, 4r] \times S^{d-1} \subset \Omega \times (\mathbb{R}^d \setminus \{0\})$ están definidas en el mismo intervalo $(-\varepsilon, \varepsilon)$, que contienen a $s^* - s_0$.

Demostración pt. 5: Construcción de la bicaracterística

Afirmamos que por la dependencia continua con respecto a los datos iniciales, podemos escoger $\varepsilon > 0$ tal que para todo $s \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ con $r \leq 1/6$ suficientemente chico y para todo $(x, \xi) \in (B[x_0, 4r] \setminus B(x_0, 3r)) \times S^{d-1}$ tenemos que $(x(s, x, \xi), \xi(s, x, \xi)) \in (\Omega \setminus B[x_0, r]) \times (\mathbb{R}^d \setminus \{0\})$.

En efecto, para $(\tilde{x}, \tilde{\xi}) \in (B[x_0, 4r] \setminus B(x_0, 3r)) \times S^{d-1}$, la solución $(x(s, \tilde{\xi}, \tilde{\xi}), \xi(s, \tilde{x}, \tilde{\xi}))$ está contenida en $(\Omega \setminus B(x_0, 11r/4)) \times (\mathbb{R}^d \setminus B(0, 3r))$ para s en un intervalo suficientemente chico $I_{\tilde{x},\tilde{\xi}} = [-\delta_{\tilde{x},\tilde{\xi}}, \delta_{\tilde{x},\tilde{\xi}}]$. Por la dependencia continua de los datos iniciales del sistema Hamiltoniano, para cada $\varepsilon' > 0$, existe $\delta = \delta(\delta_{\tilde{x},\tilde{\xi}}, \varepsilon') > 0$ de modo que para todo (x, ξ) que satisface $\|(x, \xi) - (\tilde{x}, \tilde{\xi})\|_{max} < \delta$, se tenga que $(x(s, x, \xi), \xi(s, x, \xi))$ esté definida en $I_{\tilde{x},\tilde{\xi}}$ y

$$\|(x(s, x, \xi), \xi(s, x, \xi)) - (x(s, \tilde{x}, \tilde{\xi}), \xi(s, \tilde{x}, \tilde{\xi}))\|_{max} \leq \varepsilon',$$

para todo $s \in I_{\tilde{x},\tilde{\xi}}$. En adelante, asumiremos que $\varepsilon_1 < r/2$. Para cada $s \in I_{\tilde{x},\tilde{\xi}}$ definimos

$$A^s_{\tilde{x},\tilde{\xi}} = \{(x, \xi) \in \Omega \times \mathbb{R}^d \setminus \{0\} : \|(x, \xi) - x(s, \tilde{x}, \tilde{\xi}), \xi(s, \tilde{x}, \tilde{\xi})\| < \eta\},$$

donde $\eta < \text{mín}\{\delta, r/4\}$. Además, tenemos que

Demostración pt. 6

$$A_{\tilde{x},\tilde{\xi}} = \cup_{s\in I_{\tilde{x},\tilde{\xi}}} A^s_{\tilde{x},\tilde{\xi}},$$

y

$$A = \cup_{(\tilde{x},\tilde{\xi})\in B[x_0,4r]\setminus B(x_0,3r)\times S^{d-1}} A_{\tilde{x},\tilde{\xi}}.$$

Note que la unión de los conjuntos $A_{\tilde{x},\tilde{\xi}}$ con $(\tilde{x},\tilde{\xi}) \in B[x_0,4r] \setminus B(x_0,3r) \times S^{d-1}$ no intersecta a $B(x_0,5r/2) \times B(0,11r/4)$. Por la compacidad de $B[x_0,4r] \setminus B(x_0,3r) \times S^{d-1}$, existen $(\tilde{x}_1,\tilde{\xi}_1),\ldots,(\tilde{x}_N,\tilde{\xi}_N) \in B[x_0,4r] \setminus B(x_0,3r) \times S^{d-1}$ tales que

$$B[x_0,4r] \setminus B(x_0,3r) \times S^{d-1} \subset \cup_{i=1}^N A_{\tilde{x}_i,\tilde{\xi}_i}.$$

Por tanto, dado $(x_1,\xi_1) \in B[x_0,4r] \setminus B(x_0,3r) \times S^{d-1}$, existe $i_0 \in \{1,\ldots,N\}$ de modo que

$$(x_1,\xi_1) \in A_{\tilde{x}_{i_0},\tilde{\xi}_{i_0}} A^s_{\tilde{x}_{i_0},\tilde{\xi}_{i_0}}.$$

Esto implica que existe $s_0 \in I_{\tilde{x}_{i_0},\tilde{\xi}_{i_0}}$ tal que

$$\|(x_1,\xi_1) - (x(s_0,\tilde{x}_{i_0},\tilde{\xi}_{i_0}),\xi(s_0,\tilde{x}_{i_0},\tilde{\xi}_{i_0}))\| < \eta \leq \delta.$$

Demostración pt. 7: Final de la construcción

Por la dependencia continua de los datos iniciales, se deduce que

$$\|(x(s,x_1,\xi_1),\xi(s,x_1,\xi_1)) - (x(s+s_0,\tilde{x}_{i_0},\tilde{\xi}_{i_0}),\xi(s+s_0,\tilde{x}_{i_0},\tilde{\xi}_{i_0}))\| < \varepsilon_1 < \frac{r}{2},$$

para todo $s \in I_{\tilde{x}_{i_0},\tilde{\xi}_{i_0}}$ tal que $s+s_0 \in \tilde{x}_{i_0},\tilde{\xi}_{i_0}$. Entonces, para todo $(a,b) \in B[x_0,r] \times B[0,r]$, se tiene

$$\begin{aligned}\|(a,b) - (x(s,x_1,\xi_1),\xi(s,x_1,\xi_1))\| &= \|(a,b) - (x(s,x_1,\xi_1),\xi(s+s_0,\tilde{x}_{i_0},\tilde{\xi}_{i_0}))\| \\ &\quad - \|(x(s,x_1,\xi_1),\xi(s+s_0,\tilde{x}_{i_0},\tilde{\xi}_{i_0})) \\ &\quad - (x(s,x_1,\xi_1),\xi(s,x_1,\xi_1))\| \\ &\geq \frac{3r}{2} - \frac{r}{2} = r, \quad \forall s \in I : s+s_0 \in I.\end{aligned}$$

donde I denota al menor de los intervalos $I_{\tilde{x}_i,\tilde{\xi}_i}$ para $i \in \{1,\ldots,N\}$.

Demostración pt. 8: Vuelta a la contradicción

Ahora, como $\left(x_0^*, \frac{\xi_0^*}{|\xi_0^*|}\right) \notin \text{supp}(\mu)$, se sigue por el Teorema A.7 que existe $g \in C_0^\infty(\Omega \times S^{d-1}, [0,1])$ tal que $g\left(x_0^*, \frac{\xi_0^*}{|\xi_0^*|}\right) > 0$ y $\int_{\Omega \times S^{d-1}} g d\mu = 0$.

Sea $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$ tal que $\text{supp}(\phi) \subset B[x_0^*, r_2] \subset B(x_0, r)$, $\phi(x_0^*) = 1$ y $0 \leq \phi \leq 1$. Defina $\tilde{g}(x, \xi) = |\xi|^{1-m}\phi(x)g(x, \xi/|\xi|)$ con $(x, \xi) \in \Omega \times (\mathbb{R}^d \setminus \{0\})$. Entonces $\tilde{g}$ es suave en el dominio anterior, homogénea de grado $1 - m$ en ξ y tiene soporte compacto en x. Note además que

$$0 \leq \int_{\Omega \times S^{d-1}} \tilde{g} d\mu \leq \int_{\Omega \times S^{d-1}} g d\mu = 0,$$

por lo que $\int_{\Omega \times S^{d-1}} \tilde{g} d\mu = 0$.

Ahora nuestro objetivo es unas las bicaracterísticas para llevar la información dada por g en una vecindad de $\left(x_0^*, \frac{\xi_0^*}{|\xi_0^*|}\right)$ a una vecindad de $\left(x_0, \frac{\xi_0}{|\xi_0|}\right)$.

Demostración pt. 9

Para $(x,\xi) \in B(x_0,4r) \times S^{d-1}$, definimos $f(x,\xi) = \tilde{g}(x(s^* - s_0, x, \xi), \xi(s^* - s_0, x, \xi))$. Se sigue que f está bien definida ya que anteriormente mostramos que las bicaracterísticas $(x(s,x,\xi), \xi(s,x,\xi))$ están definidas en un mismo intervalo que contiene a $s^* - s_0$ para todo $(x,\xi) \in B(x_0,4r) \times S^{d-1}$. Adicionalmente, note que f se extiende a una función continua en $\Omega \times S^{d-1}$ ya que $f(x,\xi) = 0$ en $\Omega \setminus B[x_0,3r] \times S^{d-1}$. Se sigue que $f \in C_0(\Omega \times S^{d-1}, [0,1])$.

Para completar la demostración, probaremos que $f(x,\xi_0/|\xi_0|) > 0$ y $\int_{\Omega \times S^{d-1}} = 0$. Observe que, una vez hayamos probado esto último, podemos volver a aplicar el resultado del Teorema A.7 para obtener una contradicción porque sabemos que $(x_0, \xi_0/|\xi_0|) \in \text{supp}(\mu)$.

Primeramente, note que para $\lambda > 0$ tenemos

$$(x(s,x,\lambda\xi), \xi(s,x,\lambda\xi)) = (x(s,x,\xi), \lambda\xi(s,x,\xi)), \qquad \forall (x,\xi) \in \Omega \times (\mathbb{R}^d \setminus \{0\}).$$

En efecto, como q es homogéneo de grado 1 en ξ, se sigue que $\partial q/\partial \xi$ es homogéneo de grado 0 y que $\partial q/\partial x$ es homogéneo de grado 1. Por tanto,

Demostración pt. 10

$$\frac{d}{ds}x(s,x,\xi) = \frac{\partial q}{\partial \xi}(x(s,x,\xi),\xi(s,x,\xi)) = \frac{\partial q}{\partial \xi}(x(s,x,\xi),\lambda\xi(s,x,\xi))$$

y

$$\lambda\frac{d}{ds}\xi(s,x,\xi) = -\lambda\frac{\partial q}{\partial x}(x(s,x,\xi),\xi(s,x,\xi)) = -\frac{\partial q}{\partial x}(x(s,x,\xi),\lambda\xi(s,x,\xi)).$$

Se sigue que las bicaracterísticas $(x(s,x,\xi),\lambda\xi(s,x,\xi))$ y $(x(s,x,\lambda\xi),\xi(s,x,\lambda\xi))$ son soluciones a través del punto $(x,\lambda\xi)$. Por unicidad, la igualdad anterior se tiene. Con esta información tenemos que

$$\begin{aligned} f(x_0,\xi_0/|\xi_0|) &= \tilde{g}(x(s^*-s_0,x_0,\xi_0/|\xi_0|),\xi(s^*-s_0,x_0,\xi_0/|\xi_0|)) \\ &= |\xi_0|^{m-1}\tilde{g}(x(s^*-s_0,x_0,\xi_0),\xi(s^*-s_0,x_0,\xi_0)) \\ &= |\xi_0|^{m-1}|\xi_0^*|^{1-m}\phi(x_0^*)g(x_0^*,\xi_0^*/|\xi_0^*|) > 0. \end{aligned}$$

Para calcular $\int_{\Omega\times S^{d-1}} f d\mu$, usamos la notación dada por

$$\phi_s(x,\xi) = (x(s,x,(\xi),\xi(s,x,\xi))), \qquad s\in(-\varepsilon,\varepsilon),\ (x,\xi)\in B(x_0,4r)\times S^{d-1}.$$

En particular,

$$\phi_{s^*-s_0}(x,\xi) = (x(s^*-s_0,x,\xi),\xi(s^*-s_0,x,\xi)),$$

Demostración pt. 11

y

$$0 \leq \int_{\Omega \times S^{d-1}} f d\mu = \int_{\Omega \times S^{d-1}} \chi(\tilde{g} \circ \phi_{s^* - s_0}) d\mu,$$

donde $\chi \in C_0^\infty(B(x_0, 4r))$ tal que $0 \leq \chi \leq 1$ y $\chi \equiv 1$ en una vecindad de $B[x_0, 3r]$.

Para terminar la demostración, queremos probar que

$$\int_{\Omega \times S^{d-1}} \chi(\tilde{g} \circ \phi_{s^* - s_0}) d\mu = \int_{\Omega \times S^{d-1}} \chi \tilde{g} d\mu,$$

pues sabemos que

$$\int_{\Omega \times S^{d-1}} \chi \tilde{g} d\mu \leq \int_{\Omega \times S^{d-1}} \tilde{g} d\mu = 0.$$

Para $s \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds}(\chi(\tilde{g} \circ \phi_s))(x, \xi) &= \chi(x) \frac{d}{d\tau}(\tilde{g} \circ \phi_{s+\tau})(x, \xi) \mid_{\tau=0} \\ &= \chi(x) \frac{d}{d\tau}(\tilde{g} \circ \phi_s \circ \phi_\tau)(x, \xi) \mid_{\tau=0} \\ &= \chi(x)\{\tilde{g} \circ \phi_s, q\}(x, \xi). \end{aligned}$$

Demostración pt. 12

Observe además que $\operatorname{supp}(H_q(\chi_(x,\xi))) \subset B(x_0,4r) \setminus B[x_0,3r]$, se sigue que la función $(\tilde{g}\circ\phi_s)(x,\xi)H_q(\chi)(x,\xi)$ se anula en todo $\Omega \times S^{d-1}$. Por tanto, también tenemos que

$$\begin{aligned}\{\chi(\tilde{g}\circ\phi_s),q\}(x,\xi) &= -H_q(\chi(\tilde{g}\circ\phi_s))(x,\xi)\\ &= -\chi(x)H_q(\tilde{g}\circ\phi_s) - (\tilde{g}\circ\phi_s)(x,\xi)H_q(\chi)(x,\xi)\\ &= -\chi(x)H_q(\tilde{g}\circ\phi_s)\\ &= \chi(x)\{\tilde{g}\circ\phi_s,q\}(x,\xi).\end{aligned}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned}\frac{d}{ds}\int_{\Omega\times S^{d-1}}\chi(\tilde{g}\circ\phi_s)d\mu &= \int_{\Omega\times S^{d-1}}\{\chi(\tilde{g}\circ\phi_s),q\}d\mu\\ &= \int_{\Omega\times S^{d-1}}\{\chi(\tilde{g}\circ\phi_s),p\}d\mu = 0,\end{aligned}$$

pues $H_q = |\xi|^{1-m}H_p$, en el soporte de μ. Que el lado derecho es 0, se sigue aplicando el Teorema A.6.

Demostración pt. 13

Por tanto, $\int_{\Omega\times S^{d-1}} \chi(\tilde{g}\circ\phi_s)d\mu$ es constante en $(-\varepsilon,\varepsilon)$. Usando $s=0$ y $s=s^*-s_0$, obtenemos que

$$\int_{\Omega\times S^{d-1}} \chi(\tilde{g}\circ\phi_{s^*-s_0})d\mu = \int_{\Omega\times S^{d-1}} \chi\tilde{g}d\mu = 0,$$

lo que completa la contradicción, pues esto muestra que $\left(x_0^*, \frac{\xi_0^*}{|\xi_0^*|}\right) \in \text{supp}(\mu)$. □