# SOBRE LA DIMENSIÓN DEL CONJUNTO DE OBSERVABILIDAD PARA LA ECUACIÓN DE CALOR: UN POCO DE CONTROL Y OBSERVACIÓN

FELIPE LABRA

ABSTRACT. En esta charla introduciremos las nociones de controlabilidad y observación de EDOs y EDPs con sus respectivas diferencias. Además, se comenta sobre la utilidad del Análisis Microlocal en el problema con la respectiva desigualdad espectral. El objetivo es presentar un problema de controlabilidad desde un abierto $\omega \subset \Omega$ de medida de Hausdorff positivo.

## 1. Nociones de control y observación para EDOs {Seccion1}

1.1. **Controlabilidad en dimensión finita.** El objetivo del problema de control es, sean $n, m \in \mathbb{N}$ y $T > 0$. Considere el siguiente sistema finito dimensional

$$\begin{cases} x'(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad t \in (0,T), \\ x(0) = x_0. \end{cases} \tag{1.1}$$ {{FiniteSystem

Aquí $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ y $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$. $x_0$ es un vector de $\mathbb{R}^n$. La función $x : [0,T] \to \mathbb{R}^n$ representa un estado y $u : [0,T] \to \mathbb{R}^m$ es el control. Algunas pregunta que buscamos resolver son

(1) Dado un estado $x_T$, ¿es posible encontrar un control $u(t) \in \mathbb{R}^m$ tal que, para $y$ solución de 1.1, se cumpla $x(T) = x_T$?
(2) Si lo anterior se responde afirmativamente, ¿cuántas componentes no nulas de $u(t)$ se necesitan? En general ya sabemos que $m \leq n$.

La primera pregunta se conoce como el problema de **controlabilidad exacta**. En términos más formales, queremos estudiar lo siguiente.

**Definición 1.1.** *El sistema 1.1 se dice*

(1) ***Exactamente controlable en tiempo*** $T$ *si para todo* $x_0, x_T \in \mathbb{R}^n$*, existe* $u \in L^2(0,T;\mathbb{R}^m)$ *tal que la solución de 1.1 satisface* $z(T) = z_T$.
(2) ***Controlable a cero en tiempo*** $T$ *si para todo* $x_0 \in \mathbb{R}^n$*, existe* $u \in L^2(0,T;\mathbb{R}^m)$ *tal que la solución de 1.1 satisface* $z(T) = 0$.
(3) ***Aproximadamente controlable en tiempo*** $T$ *si para todo* $x_0, x_T \in \mathbb{R}^m$ *y todo* $\varepsilon > 0$*, existe* $u \in L^2(0,T;\mathbb{R}^m)$ *tal que la solución de 1.1 satisface* $\|x(T) - x_T\|_{\mathbb{R}^m} < \varepsilon$.

En dimensión finita, las tres nociones anteriores son equivalentes. El siguiente resultado se conoce como la fórmula de representación de Duhamel,

{Duhamel}

**Proposición 1.1.** *Dada* $x(t)$ *solución de 1.1, la siguiente fórmula es válida,*

$$x(t) = e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A(t-s)}Bu(s)ds.$$

**Definición 1.2.** *Definimos el conjunto de estados alcanzables del sistema 1.1 como*

$$R(T,x_0) = \{x(T) \in \mathbb{R}^n : \ x \text{ es solución de 1.1 con } u \in L^2((0,T);\mathbb{R}^m)\}.$$

Note que gracias a la equivalencia entre las tres nociones de controlabilidad, sabemos que el sistema 1.1 es exactamente controlable en tiempo $T > 0$ si y solo si $R(T,x_0) = \mathbb{R}^n$.

Desde una perspectiva de operadores, considere $L_T : L^2((0,T);\mathbb{R}^m) \to \mathbb{R}^n$ definido por

$$L_T u = \int_0^T e^{A(T-s)}Bu(s)ds.$$

Entonces, el sistema 1.1 se dice

$$\begin{aligned} \text{exactamente controlable en tiempo } T &\iff \operatorname{Im} L_T = \mathbb{R}^n \\ \text{controlable a cero en tiempo } T &\iff e^{AT}(\mathbb{R}^n) \subset \operatorname{Im} L_T \\ \text{aproximadamente controlable en tiempo } T &\iff \overline{\operatorname{Im} L_T} = \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

En sistemas lineales finito dimensionales, tenemos un criterio algebraico de controlabilidad.

{Kalman}

**Teorema 1.1.** *Criterio de Kalman El sistema 1.1 es exactamente controlable en tiempo $T > 0$ si y solo si*

$$\operatorname{rank}[B, AB, A^2B, \ldots, A^{n-1}B] = n.$$

**Observación 1.1.** *El criterio puede volverse rápidamente difícil de aplicar sin métodos computacionales, pero como condición algebraica hace lo propio.*

**Ejemplo 1.1.** *Considere el sistema dado por*

$$\begin{cases} y_1' = y_1 + u \\ y_2' = y_2. \end{cases}$$

*Escrito matricialmente, esto es*

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} u,$$

*la matriz de Kalman es*

$$[B \mid AB] = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

*que tiene rango 1. Por tanto el sistema no es controlable.*

**Ejemplo 1.2.** *Considere el sistema dado por*

$$y''(t) + y(t) = u(t).$$

*Usando $z = y'$, tenemos el sistema*

$$\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u.$$

*La matriz de Kalman es*

$$[B \mid AB] = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

*que sí tiene rango 2, por tanto el sistema es controlable.*

1.2. **Observabilidad.** La controlabilidad exacta está estrechamente relacionada a una desigualdad del sistema adjunto homogéneo. Esta última se conoce como desigualdad de observabilidad. En esa sección, introduciremos la noción de observabilidad y mostraremos cómo se relaciona con la propiedad de controlabilidad exacta.

Considere el sistema lineal

bservable}}

$$\begin{cases} x'(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad t \in [0, T], \\ x(0) = x_0. \end{cases} \tag{1.2}$$

En este caso, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}, B \in \mathbb{R}^{n\times m}$. Supondremos además que podemos observar el vector

$$y(t) = Cx(t), \quad C \in \mathbb{R}^{k\times n},\ k < n.$$

que se interpreta como una observación o medición del estado $x(t)$. El problema de observabilidad consiste en distinguir un estado $x(t)$ del sistema a partir de conocer $y(t)$ para todo $t \in [0, T]$.

**Definición 1.3.** *El sistema 1.2 se dice observable en tiempo $T > 0$ si*

$$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n : x_1 \neq x_2 \Longrightarrow \exists u \in L^\infty(0, T; \mathbb{R}^m) : y_u(\cdot, x_1) \neq y_u(\cdot, x_2),$$

*donde $(x_u(t, x_0), y_u(t, x_0))$ es la solución 1.2 con control $u(t)$.*

El resultado que entrega la condición necesaria y suficiente para la observabilidad es

**Teorema 1.2.** *El sistema 1.2 se dice observable en tiempo $T > 0$ si y solo si*

$$\operatorname{rank}\left(\begin{pmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix}\right) = n$$

1.3. **Dualidad controlabilidad-observabilidad.** Anteriormente vimos que el sistema 1.1 es $(A, B)$ controlable si y solo si el operador $L_T : L^2((0,T);\mathbb{R}^m) \ni u(t) \mapsto x(T) \in \mathbb{R}^n$ es sobreyectivo.

Sea $A^*$ la matriz adjunta de $A$, es decir, que satisface

$$\langle Ax, y\rangle = \langle x, A^*y\rangle, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n$$

Sea $\varphi(t) \in \mathbb{R}^n$, multiplique la primera ecuación de 1.1 por $z(t)$ e integre en $(0,T)$. Luego

$$\int_0^T x'(t)\varphi(t)dt = \int_0^T Ax(t)\varphi(t)dt + \int_0^T Bu(t)\varphi(t)dt.$$

Integrando por partes el lado izquierdo, las matrices adjuntas y la definición de $L_T$ se tiene que

$$\langle L_T u, \varphi_T\rangle + \int_0^T x(t)(-\varphi(t) = A^*\varphi(t))dt = \langle u, B^*\varphi\rangle_{L^2(0,T)},$$

donde denotamos $\varphi(T) = \varphi_T$. En otras palabras, debemos pedir que se cumpla el siguiente sistema adjunto de (1.1).

$$\begin{cases} -\varphi' = A^*\varphi, \quad t \in (0,T), \\ \varphi(T) = \varphi_T. \end{cases} \tag{1.3}$$ {{FiniteAdjoin

Observe que para cada $\varphi_T \in \mathbb{R}^n$, (1.3) puede ser resuelta en tiempo revertido y, de hecho, tiene solución única $\varphi \in C([0,T];\mathbb{R}^n)$.

Además, se cumple para el operador

$$\begin{aligned} L_T^* : \mathbb{R}^n &\to L^2((0,T;\mathbb{R}^m)), \\ \varphi_T &\mapsto B^*\varphi(t). \end{aligned}$$

Así, por dualidad obtenemos

**Proposición 1.2.** *El sistema 1.1 es $(A, B)$ observable si y solo si el sistema 1.3 es $(A^*, B^*)$ observable.*

**Proof:** La demostración del resultado es consecuencia directa de que un operador es sobreyectivo si y solo si su operador adjunto es inyectivo. De este modo,

$$\begin{aligned} (A,B) \text{ es controlable} &\iff L \text{ es sobreyectivo} \\ &\iff L^* \text{ es inyectivo} \\ &\iff \forall z_{1,T}, z_{2,T} \in \mathbb{R}^n, L^*z_{1,T} = L^*z_{2,T} \implies z_{1,T} = z_{2,T} \\ &\iff (A^*, B^*) \text{ es observable.} \end{aligned}$$

□

**Definición 1.4.** *El sistema* (1.3) *se dice* ***observable*** *en tiempo $T > 0$ si existe $C > 0$ tal que*

$$\int_0^T |B^*\varphi|^2 \, dt \geq C \left|\varphi_T\right|^2, \quad \forall \varphi_T \in \mathbb{R}^n, \tag{1.4}$$ {{Observabilit

*donde $\varphi$ es la solución del sistema* (1.3).

**Proposición 1.3.** *La desigualdad* (1.4) *es equivalente al siguiente* ***principio de continuación única****:*

$$B^*\varphi(t) = 0,\ \forall t \in [0,T] \Longrightarrow \varphi_T = 0. \tag{1.5}$$ {{UniqueContin

**Teorema 1.3.** *El sistema* (1.1) *es exactamente controlable en tiempo $T > 0$ si y solo si* (1.3) *es observable en tiempo $T > 0$.*

## 2. Nociones de control y estabilización de EDPs

2.1. **Un poco de EDP.** El trabajo que estudiaremos se fundamente en el análisis espectral de la ecuación de calor. Para ello motivaremos la idea de funciones y valores propios asociado al Laplaciano.
Comencemos por un ejemplo para mostrar la idea detrás del análisis espectral del Laplaciano.

**Ejemplo 2.1.** *Considere la siguiente ecuación de Laplace en un dominio rectangular,*

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad (x,y) \in [0,L] \times [0,M], \\ u(0,y) = u(L,y) = 0, \quad y \in [0,M], \\ u(x,0) = u(x,M) = 0. \end{cases}$$

*Usando separación de variables $u(x,y) = X(x)Y(y)$, tenemos que los problemas de Sturm-Liouville asociados son*

$$\begin{cases} X'' - \lambda X = 0, \\ X(0) = X(L) = 0. \end{cases}, \qquad \begin{cases} Y'' - \lambda Y = 0, \\ Y(0) = Y(M) = 0. \end{cases}$$

*En particular, las funciones propias asociadas son*

$$X_n(x) = \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right), \qquad Y_m(y) = \sin\left(\frac{m\pi}{M}x\right),$$

*donde los valores propios asociados vienen dados por $\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2$ y $\lambda_m = \left(\frac{m\pi}{M}\right)^2$.*

**Observación 2.1.** *Inductivamente podemos resolver la ecuación de Laplace en dominios $\Omega = \prod_{k=1}^n [0, L_k] \subset \mathbb{R}^n$, encontrando su descomposición espectral explícitamente. Para dominios más generales esto no es así.*

Cuando pasamos a la ecuación de calor dada por

$$\partial_t u - \Delta u = 0,$$

podemos volver a usar separación de variables.

{Ejemplo2}

**Ejemplo 2.2.** *Considere la ecuación de calor 1-dimensional en $[0,L]$ dada por*

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0, \quad (0,T) \times (0,L), \\ u(t,0) = u(t,L) = 0, \quad (0,T), \\ u(0,x) = f(x), \quad (0,L). \end{cases}$$

*Mediante separación de variables $u(t,x) = T(t)X(x)$, uno encuentra la solución general*

$$u(t,x) = \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right) e^{-t(\pi k/L)^2},$$

*donde*

$$\beta_k = \frac{2}{L}\int_0^L f(x) \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right) dx.$$

La parte importante del último ejemplo es que logramos seguir usando la información espectral del Laplaciano. Este fenómeno es útil cuando uno trabaja en EDPs de tipo parabólico.

2.2. **Nociones de controlabilidad y observabilidad para EDP.** Antes de extender la idea desde casos finitos dimensionales al de EDP, vale notar que las nociones de controlabilidad se fundamentan en la fórmula de Duhamel de la Proposición 1.1. Para extender esto necesitamos la noción de teoría de semigrupos de operadors. Asumiremos que el operador $A$ es tal que sí admite una representación del tipo Duhamel.

Con esto recuperamos las nociones de controlabilidad y observabilidad en el caso infinito dimensional. La primera diferencia es que ya no tenemos una equivalencia entre la controlabilidad exacta, a cero y aproximada. En este caso solo tenemos

$$\begin{aligned} \text{Exactamente controlable en tiempo } T &\implies \text{Controlabilidad a cero} \\ \text{Exactamente controlable en tiempo } T &\implies \text{Controlabilidad aproximada} \end{aligned}$$

Para probar alguna de las nociones anteriores tenemos las siguientes dificultades,

(1) No tenemos un criterio algebraico del tipo Kalman 1.1 para el caso de EDPs.
(2) El conjunto de estados alcanzables es muy difícil de determinar, incluso en el caso de EDOs.

Por tanto, el método usual es el de dualidad controlabilidad-observabilidad, pues es un acercamiento en cuanto a operadores que se extiende de buena manera al caso de EDPs. En otras palabras, el problema de controlabilidad exacta de 1.1 es equivalente a la observabilidad del problema adjunto 1.3. Probar la observabilidad de este último, es equivalente a probar la desigualdad de observabilidad 1.4, que nuevamente es equivalente a la propiedad de continuación única 1.5, que es donde la comunidad posee varias herramientas para probar la estimación.

**Observación 2.2** (Importante)**.** *En el ejemplo 2.2 notamos que la solución de la ecuación de calor posee un término usualmente llamado* kernel de calor*: $e^{-t(k\pi/L)^2}$. Este término regulariza la solución de la EDP una vez que $t > 0$. En otras palabras, no es posible tener un estudio de controlabilidad exacta de la ecuación de calor, pero sí a nivel de controlabilidad a cero.*

## 3. Sobre la dimensión de conjuntos observables para la ecuación de calor

3.1. **Introducción y resultados principales.** Dado un dominio abierto, acotado y conexo $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, un tiempo $T > 0$ y $\omega \subset \Omega$ un conjunto medible, el trabajo apunta a establecer una estimación de observabilidad para la ecuacón de calor:

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u = 0, & (0,T) \times \Omega, \\ u = 0, & (0,T) \times \partial\Omega, \\ u(0,\cdot) = u_0, & \Omega. \end{cases} \tag{3.1}$$ {{EqCalorLibre

Via teoría de semigrupos de operadores, se puede probar que para todo dato inicial $u_0 \in L^2(\Omega)$, existe una única solución débil $u \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega)) \cap H^1(0,T;H^{-1}(\Omega))$. En particular, gracias al Lema de Aubin-Lions, $u \in C([0,T];L^2(\Omega))$ y gracias al efecto regularizante de la ecuación de calor, se tiene que $u(T,\cdot) \in L^\infty(\Omega)$.

Con esto podemos introducir la noción de observabilidad del problema 3.1 desde $\omega$ en tiempo $T$.

**Definición 3.1.** *Sea $T > 0$ y $\omega \subset \Omega$ un conjunto medible. La ecuación de calor 3.1 se dice observable desde $\omega$ en tiempo $T$ si existe una constante $C = C(\Omega,\omega,T) > 0$ tal que para todo $u_0 \in L^2(\Omega)$, la solución $u$ de 3.1 satisface*

$$\|u(T,\cdot)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C \int_0^T \sup_{x\in\omega} |u(t,x)| dt. \tag{3.2}$$ {{LinftyObs}}

**Observación 3.1.** *Previo a la definición vimos por qué el lado izquierdo de 3.2 está bien definido. Para el lado derecho tenemos que la expresión puede ser, potencialmente, infinito sin datos adicionales sobre $\Omega, \omega$ o $u_0$. Más aún, sin la suficiente regularidad, puede que $\sup_{x\in\omega} |u(t,x)| \neq \|u(t,\cdot)\|_{L^\infty(\omega)}$ para todo $t \in (0,T)$.*

**Observación 3.2.** *La noción de observabilidad 3.2 difiere de la definición usual, que se conoce como la estimación de observabilidad $L^2 - L^2$,*

$$\|u(T,\cdot)\|_{L^2(\Omega)} \leq C\left(\int_0^T \int_\omega |u(t,x)|^2 dtdx\right)^{1/2}. \tag{3.3}$$ {{L2L2Obs}}

*En este caso las dos cantidades son finitas por resultados clásicos de controlabilidad y observabilidad.*

La idea del trabajo es enfocarnos en conjuntos $\omega \subset \Omega$ donde posiblemente $|\omega| = 0$ y $|\cdot|$ denota la medida de Lebesgue $n$-dimensional en $\mathbb{R}^n$. Trabajaremos bajo el siguiente supuesto

**Supuesto 1.** *El conjunto $\Omega$ es un abierto conexo Lipschitz de $\mathbb{R}^n$ localmente estrellado.*

La contribución principal del trabajo es entregar resultados de observabilidad para 3.1 cuando la dimensión de Hausdorff de $\omega$ es estrictamente mayor que $n-1$. Para $s \geq 0$, el contenido $s-$Hausdorff de un conjunto $E \subset \mathbb{R}^n$ es

$$C^s_{\mathcal{H}} = \inf\left\{\sum_j r_j^s : E \subset \cup_j B(x_j, r_j)\right\}, \tag{3.4}$$

y la dimensión de Hausdorff de $E$ se define como

$$\dim_{\mathcal{H}}(E) = \inf\{s \geq 0 : C^s_{\mathcal{H}}(E) = 0\}, \qquad \operatorname{codim}_{\mathcal{H}}(E) = n - \dim_{\mathcal{H}}(E). \tag{3.5}$$

**Observación 3.3.** *La manera más clásica de estudiar la dimensión de Hausdorff es con la $s-$medida de Hausdorff definida para $E \subset \mathbb{R}^n$:*

$$\mathcal{M}^s_{\mathcal{H}} = \lim_{\delta \to 0} \inf\left\{\sum_j \operatorname{diam}(A_j)^s : \ E \subset \cup_j A_j, \ \operatorname{diam}(A_j) \leq \delta\right\}.$$

*Si bien la $s-$medida de Hausdorff y el $s-$contenido de Hausdorff de un abierto pueden diferiri, tienen los mismos conjuntos de medida nula, por lo que $C^s_{\mathcal{H}}(E) > 0 \iff \mathcal{M}^s_{\mathcal{H}}(E) > 0$, $E \subset \mathbb{R}^n$ y se sigue que tienen la misma dimensión de Hausdorff.*

{Thm1.4}

**Teorema 3.1.** *Sea $T > 0$ y $\omega \subset \Omega$ un subconjunto medible que satisfacen $\dim_{\mathcal{H}}(\omega) > n-1$. Entonces la ecuación de calor 3.1 es observable desde $\omega$ con tiempo $T$.*

*De manera más precisa, si $\delta > 0$ y $\omega \subset \Omega$ es un subconjunto medible que satisface $C^{n-1+\delta}_{\mathcal{H}}(\omega) > 0$, entonces existe $C = C(\Omega, \delta, \omega) > 0$ tal que para todo $T > 0$, para todo $u_0 \in L^2(\Omega)$, la solución $u$ de 3.1 satisface*

$$\|u(T,\cdot)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq Ce^{C/T} \int_0^T \sup_{x \in \omega} |u(t,x)| dt. \tag{3.6}$$

Ahora hacemos un par de comentarios con respecto a los supuestos geométricos sobre $\Omega$ y $\omega$.

- Cuando $\omega \subset \Omega$ es un abierto no vacío, Fattorini y Russell en 1971 prueban la estimación $L^2 - L^2$ 3.3 en el caso 1 dimensional por el método de momentos. 20 años después, el resultado fue generalizado al caso multi-dimensional usando estimaciones de Carleman de dos maneras distintas: La primera estimación es microlocal, de donde nace el llamado método de Lebeau-Robbiano para el caso $\Omega$ de clase $C^\infty$. La segunda estimación es una Carleman global para $\Omega$ de clase $C^2$.
- Cuando $\omega$ solo de asume Lebesgue-medible con $\Omega$ Lipschitz y localmente estrellado, en Apraiz, Escauriaza, Wang y zhang en el 2014 se prueba la estimación $L^2 - L^2$ 3.3 mediante estimaciones espectrales.
- Cuando $\Omega$ es $W^{2,\infty}$, Burq y Moyano en el 2023 probó la estimación de observabilidad 3.2 para $\omega$ medible con posible medida de Lebesgue, pero con contenido de Hausdorff positivo: $C^{n-1+\delta}_{\mathcal{H}}(\omega) > 0$ para $\delta \in (0,1)$. La nueva idea es usar una propagación de pequeñez cuantitativa.
- El supuesto del Teorema 3.1, $\dim_{\mathcal{H}}(\omega) > n-1$, es sharp: para todo $M > 0$, existe un $\omega$ con $C^{n-1}_{\mathcal{H}}(\omega) \geq M$ tal que la desigualdad de observabilidad en $L^\infty$ 3.2 no se tiene. Esto se sabe gracias a Logunov, Malinnikova, Nadirashvili y Nazarov en el 2021.

Por la dualidad Controlabilidad-Observabilidad, gracias al *Hilbert Uniqueness Method* podemos deducir un resultado de controlabilidad a cero de la ecuación de calor con control interno,

orControl}}

$$\begin{cases} \partial_t y - \Delta y = h1_\omega, & (0,t)\times\Omega, \\ y = 0, & (0,T)\times\partial\Omega, \\ y(0,\cdot) = y_0, & \Omega. \end{cases} \tag{3.7}$$

Aquí $h(t,\cdot):\omega\to\mathbb{R}$ es el control. Denotamos por $\mathcal{M}(\Omega)$ al espacio de medidas de Borel en $\Omega$, que es el dual topológico de $C_c^0(\Omega)$.

{Thm1.7}

**Teorema 3.2.** *Sea $T>0$ y $\omega\subset\Omega$ un subconjunto medible y cerrado que satisface $\dim_{\mathcal{H}}(\omega)>n-1$. Entonces 3.7 es controlable a 0 en tiempo $T$. Es decir, para todo dato inicial $y_0\in L^2(\Omega)$, existe $h\in L^\infty(0,T;\mathcal{M}(\Omega))$ soportado en $(0,T)\times\omega$ tal que la solución débil $y$ de 3.7 satisface $y(T,\cdot)=0$.*

*De manera más precisa, si $\delta>0$ y $\omega\subset\Omega$ es un subconjunto cerrado y medible que satisface $C_{\mathcal{H}}^{n-1+\delta}(\omega)>0$, entonces existe $C=C(\Omega,\delta,\omega)>0$ tal que para todo dato inicial $y_0\in L^2(\Omega)$, existe $h\in L^\infty(0,T;\mathcal{M}(\Omega))$ soportado en $(0,T)\times\omega$ que satisface*

$$\sup_{t\in(0,T)}\|h(t)\|_{\mathcal{M}(\Omega)}\le Ce^{C/T}\|y_0\|_{L^2(\Omega)}, \tag{3.8}$$

*de modo que la solución débil $y$ de 3.7 satisface $y(T,\cdot)=0$.*

A pesar de que la condición de dimensión de Hausdorff es *sharp* en el Teorema 3.1, el segundo objetivo del trabajo es presentar familias de conjuntos construidas especialmente para mantener la observabilidad de la ecuación de calor, pero con dimensión menor o igual a $n-1$.

En Dol73, se prueba que la ecuación de calor 3.1 con $\Omega=(0,1)$ se puede observar desde un punto especialmente elegido $\omega=\{x_0\}\subset\Omega$. El trabajo busca extender esta idea al caso multidimensional, a pesar de que se prueba que cuando $\Omega=(0,1)^n$ con $n\ge 2$, 3.1 no es observable desde una cantidad finita de puntos.

En base a lo anterior, se cambia la estrategia para construir una clase de conjuntos grandes desde los cuales la ecuación de calor es observable. Esta clase contiene a los conjuntos de capacidad logarítmica positiva y los conjuntos contables bien espaciados del tipo $\omega_\alpha=\{k^{-\alpha}:k\in\mathbb{N}\}$ con $\alpha>0$.

Bajo argumentos espectrales, se logra construir conjuntos cerrados de dimensión 0 desde donde se pued eobservar en $\Omega=(0,1)^n$ tomando $\omega=\omega_\alpha\times\cdots\times\omega_\alpha$. También se logra refinar la estrategia de Dol73, considerando $\omega=\{x_0\}\times\omega'$ con $\omega'\subset\Omega'\subset\mathbb{R}^{n-1}$ es un conjuntos de observación para $(0,1)\times\Omega'$ con $\dim_{\mathcal{H}}(\omega')>n-2$ y $x_0$ se escoge de manera apropiada.

Hay algunas preguntas naturales a partir de toda esta discusión:

(1) ¿Es $\omega_{\exp}=\{2^{-k}:k\in\mathbb{N}\}$ un conjunto de observación en $(0,1)$?
(2) En dimensiones mayores, ¿podrían ciertas curvas algebraicas servir como un reemplazo para un punto astuciosamente elegido con propiedades algebraicas preescritas? Probar o refutar la observabilidad de líneas de pendiente irracional o parábolas es un problema abierto para $(0,1)^2$.

## 4. Demostración de la observabilidad

Esbozamos las ideas principales de las demostraciones.

Para probar el Teorema 3.1 seguiremos el método clásico de Lebeau-Robbiano que se basa en una estimación espectral. El operador $-\Delta$ con dominio $H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)$ es auto-adjunto con resolvente compacto en $L^2(\Omega)$, por lo que admite una base ortornormal de funciones propias $(\varphi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ con valores propios reales $(\lambda_k)_{k\in\mathbb{N}}$. Dado $\Lambda>0$, introducimos las projecciones espectrales $\Pi_\Lambda$ como

$$\Pi_\Lambda u=\sum_{\lambda_k\le\Lambda}\langle u,\varphi_k\rangle_{L^2}\varphi_k,\qquad \forall u\in L^2(\Omega). \tag{4.1}$$

4.1. **Estimación espectral.** La estimación buscada es la siguiente,

{Thm2.1}

**Teorema 4.1.** *Para todo $\delta > 0$, para todo $\omega \subset \Omega$ tal que $C_{\mathcal{H}}^{n-1+\delta}(\omega) > 0$, existe $C = C(\Omega, \delta, \omega) > 0$ tal que para todo $\Lambda > 0$ se tiene*

{{Eq2.2}}
$$\|\Pi_\Lambda u\|_{L^2(\Omega)} \leq Ce^{C\sqrt{\Lambda}} \sup_{x\in\omega} |(\Pi_\Lambda u)(x)|, \qquad \forall u \in L^2(\Omega). \tag{4.2}$$

La demostración del resultado anterior es, en general, técnica pero clásica. El ingrediente principal es un resultado de propagación de pequeñez. Aplicado en nuestro problema, este último dice que

{Lem2.3}

**Lema 4.1.** *Sea $d \geq 2$, $m, \delta > 0$, $\mathcal{K} \subset\subset B_1 \subset \mathbb{R}^d$. Entonces existe $C = C(d, \mathcal{K}, \delta, m) > 0$ y $\alpha = \alpha(d, \mathcal{K}, \delta, m) \in (0, 1)$ tal que para todo $\mathcal{E} \subset\subset B_1$ que es un subconjunto de un hiperplano y satisface $C_{\mathcal{H}}^{d-2+\delta}(\mathcal{E}) \geq m$, entonces para toda $u : B_2 \to \mathbb{R}$ que satisface $\Delta u = 0$ en $B_2$,*

opagation}}
$$\sup_{x\in\mathcal{K}} |\nabla u(x)| \leq C \sup_{x\in\mathcal{E}} |\nabla u(x)|^\alpha \|\nabla u\|^{1-\alpha}_{L^\infty(B_1)}. \tag{4.3}$$

La demostración es nuevamente clásica y técnica, pues se precisa una estimación de Carleman previa. La buena noticia es que este Lema es suficiente para probar el Teorema 4.1.

**Proof:**[Demostración del Teorema 4.1] Dado que $\dim_{\mathcal{H}}(\omega) > n - 1$, tenemos que existe $\delta > 0$ tal que

{{Eq2.7}}
$$C_{\mathcal{H}}^{n-1+\delta}(\omega) > 0. \tag{4.4}$$

Separamos la demostración en dos pasos.

**Paso 1: Observación desde una bola apropiada.** Probaremos que existe $x_0 \in \Omega$ y $r > 0$ tal que

{{Eq2.8}}
$$m := C_{\mathcal{H}}^{n-1+\delta}(\omega \cap B(x_0, r)) > 0, \qquad B(x_0, 4r) \subset \Omega. \tag{4.5}$$

Note que $\Omega = \cup_{k\in\mathbb{N}}\Omega_k$ donde $\Omega_k = \{x \in \Omega : \operatorname{dist}(x, \partial\Omega) \geq 1/k\}$. Por subaditividad del contenido de Hausdorff y la cota (4.4), se sigue que existe $k \in \mathbb{N}^*$ tal que $C_{\mathcal{H}}^{n-1+\delta}(\omega \cap \Omega_k) > 0$. Entonces, existe $x_0 \in \Omega_k$ tal que $C_{\mathcal{H}}^{n-1+\delta}(\omega \cap B(x_0, 1/8k)) > 0$, por lo que 4.5 se cumple para tal $x_0$ y $r = 1/8k$ ya que $\operatorname{dist}(x_0, \partial\Omega) \geq 1/k$.

Ahora, para $u \in L^2(\Omega)$ y $\Lambda \geq 1$, podemos probar (4.2) asumiendo que $u = \Pi_\Lambda u$, tenemos la siguiente desigualdad espectral,

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq Ce^{C\sqrt{\Lambda}} \sup_{x\in B(x_0,r)} |u(x)|. \tag{4.6}$$

**Paso 2: Observación en $\omega$.** Considere

$$\hat{u}(x, t) = \sum_{\lambda_k\leq\Lambda} \langle u, \varphi_k\rangle_{L^2(\Omega)} \frac{\sinh(\sqrt{\lambda_k}t)}{\sqrt{\lambda_k}} \varphi_k(x), \qquad (x, t) \in \Omega \times (-2, 2). \tag{4.7}$$

Se puede checkear que $\Delta_{x,t}\hat{u} = 0$. Salvo traslaciones, asumimos $x_0 = 0$ y reducimos $r > 0$ si es necesario para considerar $B_1$ la bola unitaria en $\mathbb{R}^{n+1} = \mathbb{R}^d$ y $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}^d$ tal que

$$B(x_0, r) \times (-1/2, 1/2) \subset\subset \mathcal{K} \subset\subset B_1 \subset\subset \Omega \times (-1, 1),$$

y

$$\mathcal{E} = (\omega \cap B(x_0, r)) \times \{0\} \subset \mathbb{R}^n \times \{0\}.$$

Entonces podemos aplicar el Lema 4.1,

$$\sup_{(x,t)\in\mathcal{K}} |\nabla\hat{u}(x, t)| \leq C \sup_{(x,t)\in\mathcal{E}} |\nabla\hat{u}(x, t)|^\alpha \|\nabla\hat{u}\|^{1-\alpha}_{L^\infty(B_1)}, \tag{4.8}$$

de donde se obtiene que

$$\sup_{x\in B(x_0,r)} |\partial_t\hat{u}(x, 0)| \leq C \left( \sup_{x\in\omega\cap B(0,r)} |\partial_t\hat{u}(x, 0)| \right)^\alpha \|\hat{u}\|^{1-\alpha}_{W^{1,\infty}_{t,x}(B_1)}. \tag{4.9}$$

Para terminar, observe que $\partial_t \hat{u}(x,0) = u(x)$ y que

$$\sup_{x\in\omega\cap B(x_0,r)} |\partial_t \hat{u}(x,0)| \leq \sup_{x\in\omega} |u(x)|.$$

Esto junto con estimaciones locales e inyecciones de Sobolev, obtenemos

$$\|\hat{u}\|_{W^{1,\infty}_{t,x}(B_1)} \leq C\|\hat{u}\|_{L^2(\Omega\times(-1,1))} \leq Ce^{C\sqrt{\lambda}}\|u\|_{L^2(\Omega)}. \tag{4.10}$$

Juntando lo anterior, deducimos que

$$\sup_{x\in B(x_0,r)} |u(x)| \leq Ce^{C\sqrt{\lambda}} \left(\sup_{x\in\omega} |u(x)|\right)^{\alpha} \|u\|^{1-\alpha}_{L^2(\Omega)}, \tag{4.11}$$

La conclusión se sigue de usar las dos estimaciones finales de cada paso. □

La demostración del Teorema 3.1 está en el Apéndice. El argumento de dualidad es suficiente para probar que el Teorema 3.1 implica el Teorema 3.2.

## 5. Conjuntos medibles de dimensión de Hausdorff baja

En esta sección estudiamos conjuntos $\omega$ que tienen dimensión de Hausdorff menor a $n-1$ en los cuales la ecuación de calor sigue siendo observable. En particular, mostramos ejemplos de dimensión 0 en un dominio ambiente de dimensión arbitrariamente alta.

### 5.1. **Observabilidad desde un subconjunto finito.**

Dolecki en Dol73 muestra que la ecuación de calor en $\Omega = (0,1)$ es observable desde $\omega = \{x_0\}$ bajo ciertas propiedades algebraicas de $x_0$.

La extensión natural a dimensión $n \geq 2$ falla como se muestra en Sam15 por Samb. De hecho prueba lo siguiente

{Thm3.1}

**Teorema 5.1.** *[Samb 2015] Sea $x_0 \in (0,1)$ un número algebraico irracional de orden $d > 1$. Entonces existe una constante $C > 0$ tal que para todo $T > 0$, para todo $u_0 \in L^2(\Omega)$, la solución $u$ de (3.1) satisface*

$$\|u(T,\cdot)\|^2_{L^\infty(0,1)} \leq Ce^{C/T} \int_0^T |u(t,x_0)|^2 dt.$$

**Proof:**[Sketch de la demostración] La demostración se separa en varias estimaciones por separado. Aquí sólo nos preocuparemos de identificar dónde se usa que $x_0$ sea algebraico e irracional.

Se obtiene la siguiente estimación,

$$\|v(y_0)\|_{L^2(0,T;L^2(\omega_2))} \leq CC_T^{\Omega_1} e^{C\sqrt{\lambda_J^{\Omega_2}}} \|y_0\|_{L^2(\Omega)}.$$

El siguiente objetivo es estimar la constante, que es la constante de controlabilidad a cero,

$$C_T = \sum_{j\geq 1} \frac{e^{-(k\pi)^2 T}}{d_k|\varphi_k(x_0)|},$$

donde $d_k(T)$ es la distancia en $L^2(0,T)$ entre $e^{-(k\pi)^2 t}$ y el menor subespacio cerrado de $L^2[0,T]$ que contienen a las funciones $\{e^{-(n\pi)^2 t}\}_{n\neq k}$. Via el método de Lebeau-Robbiano y algunas estimaciones extra, se prueba que

$$C_T \leq Ce^{\frac{C^2}{T}} \sum_{k\geq 1} \frac{e^{-\frac{3}{4}(k\pi)^2 T}}{|\varphi_k(x_0)|}, \qquad \forall x_0 \in (0,1)\setminus\mathbb{Q}.$$

Necesitamos la siguiente proposición.

**Proposición 5.1.** *Si $x_0$ es un número algebraico de orden $d > 1$, entonces para todo $\alpha > 0$, existe una constante $C(d) > 0$ tal que*

$$\sum_{k\geq 1} \frac{e^{-(k\pi)^2\alpha T}}{|\varphi_k(x_0)|} \leq C(d,\alpha)e^{\frac{d}{2T}},$$

*consecuentemente, existe $C > 0$ tal que $C_T^{\Omega_1} \leq Ce^{C/T}$.*

**Proof: Paso 1.** Afirmamos que existe $A > 0$ tal que

$$\frac{1}{|\varphi_k(x_0)|} = \frac{1}{\sqrt{2}|\sin(k\pi x_0)|} \leq \frac{k^{d-1}}{2\sqrt{2}A}.$$

En efecto, sea $p_k \in \mathbb{N}$ el único entero tal que $p_k - \frac{1}{2} < kx_0 < p_k + \frac{1}{2}$ y $\varepsilon_k = kx_0 - p_k \in (-1/2, 1/2)$, se tiene que

$$|\sin(k\pi x_0)| = |\sin(\pi\varepsilon_k)| \geq \frac{2}{\pi}|\pi\varepsilon_k| = 2|\varepsilon_k|,$$

ya que $|\sin(t)| \geq \frac{2}{\pi}|t|$ para todo $t \in [-\pi/2, \pi/2]$. Por tanto,

$$\frac{1}{|\sin(k\pi x_0)|} \leq \frac{1}{2k|x_0 - p_k/k|}.$$

Ahora usamos el Teorema de Liouville sobre aproximacion diofantina, existe un real $A > 0$ tal que para cualqueir par de enteros $p, q$ con $q > 0$ tales que $|x_0 - p/q| \geq A/q^d$. Por tanto,

$$\frac{1}{|\varphi_k(x_0)|} \leq \frac{k^{d-1}}{2\sqrt{2}A}, \quad \text{y} \quad \sum_{k\geq 1} \frac{e^{-(k\pi)^2\alpha T}}{|\varphi_k(x_0)|} \leq \frac{1}{2A\sqrt{2}} \sum_{k\geq 1} k^{d-1}e^{-(k\pi)^2\alpha T}.$$

**Paso 2.** Ahora, aplicando el criterio de Cauchy integral sobre la función $x \mapsto x^{d-1}e^{-x^2\alpha\pi^2 T}$, obtenemos que

$$\sum_{k\geq 1} k^{d-1}e^{-(k\pi)^2\alpha T} \leq \left(\frac{d-1}{\alpha\pi^2 T}\right)^{d/2} \left(1 + \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)\right),$$

y dado que $e \leq xe^{1/x}$ para todo $x > 0$, entonces para todo $T > 0$ se tiene

$$\frac{1}{T^{d/2}} \leq e^{\frac{d}{2}(1/T-1)}.$$

Por tanto, existe $C(d) > 0$ tal que $C_T^{\Omega_1} \leq C(d)e^{C/T}$ para todo $T > 0$. □

□

De la demostración de Samb se tiene que el resultado es válido para cualquier número diofantino (en otras palabras, un número que no sea de Liouville) ya que solo usa que un número algebraico irracional es un número diofantino.

**Proposición 5.2.** *Sea $\Omega = (0,1)^n$ con $n \geq 2$ y $T > 0$. Para todo subconjunto finito $\omega \subset \Omega$, la ecuación de calor 3.1 no es observable desde $\omega$ para tiempo $T$.*

La intuición detrás de la razón de por qué en este caso la observabildiad falla tiene que ver con el grado de degeneración de los niveles de energía de $-\Delta$ para $n \geq 2$. El espectro de $-\Delta$ en $\Omega$ viene dado por

$$\text{Spec}(-\Delta) = \{r_1^2 + \cdots + r_n^2 : (r_1, \ldots, r_n) \in (\mathbb{N}^*)^n\},$$

y para todo $r \in \text{Spec}(-\Delta)$, el espacio prio $E_r(-\Delta)$ asociado a $r$ es

$$E_r(-\Delta) = \text{Span}_{\mathbb{C}}\{\varphi_{r_1} \otimes \cdots \otimes \varphi_{r_n} : \ r_1^2 + \cdots + r_n^2 = r\},$$

con dimensión igual a la función conteo de la suma de cuadrados:

$$s_n(r) = \#\{(r_1, \ldots, r_n) \in (\mathbb{N}^*) : \ r_1^2 + \cdots + r_n^2 = r\}.$$

Si $n \geq 2$, entonces $\limsup_{r\to\infty} s_n(r) = \infty$, lo que muestra la degeneración del $r-$ésimo nivel de energía.

Más en general, tenemos el siguiente resultado.

**Proposición 5.3.** *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un abierto acotado con $n \geq 2$. Para cualquier subconjunto finito $\omega \subset \Omega$, la ecuación de calor 3.1 no es observable desde $\omega$ en tiempo $T$.*

En base a lo anterior, nos gustaría ver en dimensiones superiores cómo podemos construir conjuntos de observación de dimensión suficientemente baja.

5.2. **Caso 1-dimensional.** Reemplazamos la medida de Lebesgue con una cantidad relacionada al diámetro transfinito. Para todo conjunto $E \subset [0,1]$, defina

$$\gamma_k(E) = \sup_{\{x_i\}_{i=1}^k \subset E} \min_i \prod_{j \neq i} |x_i - x_j|. \tag{5.1}$$

La idea es, dado $E \subset [0,1]$, buscar condiciones sobre $\gamma_k(E)$ para que se pueda probar una desigualdad espectral. La siguiente proposición da un primer paso en esta dirección.

**Proposición 5.4.** *Sea $(M_l)_{l\geq 0} \subset (0,\infty)^{\mathbb{N}}$ y suponga que existe $l_0 \in \mathbb{N}$ tal que $M_{l_0}/l_0! \leq 1/2$. Entonces para todo $f \in C^\infty([0,1])$ y $E \subset [0,1]$ se tiene*

$$\sup_{[0,1]} |f| \leq \frac{4l_0}{\gamma_{l_0}(E)} \sup_E |f|. \tag{5.2}$$

La condición buscada es la siguiente. Podemos obtener una desigualdad espectral efectiva para $E$ si se satisface

$$\limsup_{k\to\infty} \frac{\log(-\log \gamma_k(E))}{\log k} < 2. \tag{5.3}$$ {{3.8}}

De este modo, la familia de conjuntos 0-dimensionales indexados por $\alpha > 0$ que consideraremos son

$$\omega_\alpha = \{i^{-\alpha} : \ i \in \mathbb{N}^*\}. \tag{5.4}$$

En esta clase de conjuntos, tenemos la siguiente estimación que nos permite mostrar la desigualdad espectral.

**Lema 5.1.** *Para todo $\alpha > 0$, existe $c_1, c_2 > 0$ tales que*

$$\gamma_k(\omega_\alpha) \geq c_1 e^{c_2 k \log k}. \tag{5.5}$$

Finalmente, gracias a los Teoremas 4.1 y 5.1, podemos exhibir conjuntos de observación de dimensión $n-2+\delta$.

**Corolario 5.1.** *Sea $T > 0$, $\delta > 0$ y $\Omega = (0,1) \times \Omega'$ donde $\Omega' \subset \mathbb{R}^{n-1}$. Sea $x_0 \in (0,1)$ un número algebraico de orden $d > 1$ y $\omega \subset \Omega'$ un subconjunto medible que satisface $C_{\mathcal{H}}^{n-2+\delta}(\omega) > 0$. La ecuación de calor 3.1 es observable desde $\{x_0\} \times \omega$ en tiempo $T$.*

**Corolario 5.2.** *Sean $\alpha, T > 0$, $n \geq 2$ y $x_0$ un número algebraico de grado $d > 1$. Entonces la ecuación de calor 3.1 en $\Omega = (0,1)^n$ es observable desde $\{x_0\} \times \omega_\alpha \times \cdots \times \omega_\alpha$ en tiempo $T$.*

## 6. Finalmente: preguntas abiertas

Cuando estudiamos el conjunto de observación $\{x_0\} \times \omega_\alpha$ notamos que tiene un punto de acumulación $(x_0, 0)$. Este conjunto se vuelve más concentrado cuando $\alpha \to \infty$. La primera pregunta es considerando el conjunto

$$\omega_{\exp} = \{2^{-k} : k \in \mathbb{N}^*\}.$$

Se puede mostrar que $\gamma_k(\omega_{\exp}) \sim C^{-k^2}$, por lo que 5.3 no se tiene, por lo que nos quedamos sin desigualdad espectral.

**Pregunta abierta 1.** Para $\Omega = (0,1)$ y $\omega = \omega_{\exp}$, ¿Es la ecuación de calor 3.1 observable? En la misma línea, para $\Omega = (0,1)^2$, ¿es observable desde

$$\{x_0\} \times \omega_{\exp}, \qquad \text{o} \qquad \omega_{\exp} \times \omega_{\exp},$$

para algún punto $x_0 \in (0,1)$?
La segunda pregunta tiene que ver con conjuntos de observación que no sean del tipo producto. La clave del argumento usado es que uno descompone $\Omega$ como un dominio cilíndrico $\omega \times \Omega' \subset \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^{n-1}$. En la primera componente observamos desde un punto $x_0$ y buscamos arrastrar esta propiedad al dominio completo.

Por otro lado, la proposición que se muestra no está en total generalidad: faltan los conjuntos que no se pueden escribir como productos y la primera idea es ver si los argumentos anteriores se pueden probar para conjuntos de esa forma.

Por ejemplo, la diagonal

$$D = \{(x, x) : x \in (0, 1)\} \subset \mathbb{R}^2,$$

es un conjunto nodal de

$$\phi_{n,m}(x, y) = \sin(\pi n x) \sin(\pi m y) - \sin(\pi n y) \sin(\pi m x),$$

por lo que $D$ no puede ser un conjunto de observación.

**Pregunta abierta 2.** ¿Es posible observar la ecuación de calor 3.1 en $(0, 1)^2$ desde una curva algebraica que no sea una línea paralela a algún eje coordenado? [**?**]

## Appendix A. Algunas estimaciones de Carleman

**Teorema A.1** (Estimación de Carleman elíptica interior)**.** *Sea $\omega \subset \Omega$ un abierto no vacío. Entonces existen una función $\varphi \in C^2(\overline{\Omega})$, $C > 0$ y $s_0 > 0$ tales que, para toda $u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ y todo $s \geq s_0$, se tiene*

$$s^3 \|e^{s\varphi} u\|^2_{L^2(\Omega)} + s \|e^{s\varphi} \nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} \leq C \left( \|e^{s\varphi} \Delta u\|^2_{L^2(\Omega)} + s^3 \|e^{s\varphi} u\|^2_{L^2(\omega)} \right).$$

**Teorema A.2** (Estimación de Carleman global parabólica)**.** *Fije el tiempo de control $T > 0$ y defina $\theta(t) = \frac{1}{t(T-t)}$. Sea $\omega \subset \Omega$ un abierto no vacío. Entonces existe $\varphi \in C^2\overline{\Omega}$ tal que*

$$\sup_{\Omega} \varphi < 0, \quad y \quad \inf_{\Omega \setminus \omega} |\nabla \varphi| > 0,$$

*para los cuales se tiene la siguiente propiedad: para cualquier $d \in \mathbb{R}$, existe $s_0 > 0$ y $C > 0$ tal que la siguiente estimación es válida para todo $s \geq s_0$ y todo $u \in C^2([0, T] \times \overline{\Omega})$ tal que $u = 0$ en $(0, T) \times \partial\Omega$:*

$$\int_0^T \int_\Omega (s\theta)^d \left| e^{s\theta\varphi} u \right|^2 + \int_0^T \int_\Omega (s\theta)^{d-2} \left| e^{s\theta\varphi} \nabla u \right|^2 \leq C \left( \int_0^T \int_\omega (s\theta)^d \left| e^{s\theta\varphi} u \right|^2 + \int_0^T \int_\Omega (s\theta)^{d-3} \left| e^{s\theta\varphi} (\partial_t u \pm \Delta u) \right|^2 \right)$$