Propagación de la medida de defecto microlocal

Felipe Labra Irribarra

Seminario de Análisis Microlocal.

5 de mayo de 2026

Contents

1. Objetivo
2. Teorema de Propagación
3. Teorema sobre el soporte

Contents

1 Objetivo

2 Teorema de Propagación

3 Teorema sobre el soporte

Teorema de propagación de la MDM

Theorem (Teorema A.6.)

Sea P un operador diferencial de orden m sobre Ω con $P^* = P$ y sea $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión acotada en $L^2_{loc}(\Omega)$ que converge débil a 0, a la que asociamos una medida de defecto microlocal μ. Suponga que $\{Pu_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge fuerte a 0 en $H^{1-m}_{loc}(\Omega)$. Entonces para todo $a \in C^\infty(\Omega \times \mathbb{R}^d \setminus \{0\})$ homogéneo de grado $1-m$ en la segunda variable y con soporte compacto en la primera variable,

$$\int_{\Omega \times S^{d-1}} \{a, p\}(x, \xi) d\mu(x, \xi) = 0. \tag{1}$$

Idea: Invarianza bajo el flujo Hamiltoniano asociado al símbolo principal de P.

Teorema sobre el soporte de la MDM

Theorem (Teorema A.9)

Sea P un operador diferencial de orden m sobre Ω y sea $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión acotada en $L^2_{loc}(\Omega)$ que converge débil a 0 a la que asociamos una medida de defecto microlocal μ. Entonces las siguientes propiedades son equivalentes:

1. $Pu_n \to 0$ *fuerte en* $H^{-m}_{loc}(\Omega)$ *donde* $m > 0$,
2. $\text{supp}(\mu) \subset \{(x,\xi) \in \Omega \times S^{d-1} : \sigma_m(P)(x,\xi) = 0\}$.

Idea: Recuperar una mejor noción de la idea de MDM: $\mu = 0 \iff u_n \to u$.

Contents

1 Objetivo

2 Teorema de Propagación

3 Teorema sobre el soporte

Demostración

Considere $\chi, \chi_1 \in C_0^\infty(\Omega)$ tales que $\chi = 1$ en una vecindad de $\pi_1(\text{supp}(a))$ y $\chi_1 = 1$ en una vecindad de $\text{supp}(\chi)$. Considere $\gamma \in C^\infty(\Omega)$ tal que $\gamma = 0$ en una vecindad de 0 y $\gamma = 1$ cuando nos vamos al infinito. Sea A el operador definido por el símbolo $b(x,\xi) = \gamma(\xi)a(x,\xi)$. El símbolo del adjunto, $A^*_{\chi_1}$ viene dado por $b^*(x,\xi) = \overline{b(x,\xi)} + r(x,\xi)$, donde $r \in S_c^{-m}(\Omega)$. Para una función u suficientemente regular, y luego de realizar cálculos, obtenemos que

$$\begin{aligned}([A,P](\chi u), \chi u)_{L^2(\Omega)} = (P(\chi u), A^*_{\chi_1}(\chi u))_{L^2(\Omega)} - (A(\chi u), \chi P u)_{L^2(\Omega)} \\ - (A(\chi u), [P,\chi]u)_{L^2(\Omega)}.\end{aligned}$$

Ahora, note que usando el teorema del binomio y la regla del producto se tiene

$$P(\chi u) = \chi P u + [P,\chi]u,$$

donde $[P,\chi]$ es un operador diferencial de orden $m-1$ que solo involucra derivadas parciales de χ. Por otro lado, notamos que $A(\chi u)(x) = 0$ para $x \notin \pi_1(\text{supp}(a))$ de modo que podemos escribir pues supusimos $\chi = 1$ en una vecindad de este conjunto.

$$(A(\chi u), [P,\chi]u)_{L^2(\Omega)} = (A(\chi u), [P,\chi]u)_{L^2(\pi_1(\text{supp}(a)))} = 0,$$

Por la regularidad de A y la observación anterior, tenemos que $\partial_x^\beta \chi = 0$ para todo $\beta > 0$.
Ahora vemos el término $(P(\chi u), A^*_{\chi_1}(\chi u))_{L^2(\Omega)}$, tenemos que

$$\begin{aligned}(P(\chi u), A^*_{\chi_1}(\chi u))_{L^2(\Omega)} =& (P(\chi u), \overline{b}(x, D)(\chi u))_{L^2(\Omega)} \\ &+ (P(\chi u), r(x, D)(\chi u))_{L^2(\Omega)}.\end{aligned}$$

Usando la descomposición anterior para $P(\chi u)$, tenemos para el primer término

$$\begin{aligned}(P(\chi u), \overline{b}(x, D)(\chi u))_{L^2(\Omega)} &= (\chi P u, \overline{b}(x, D)(\chi u))_{L^2(\Omega)} + \\ &+ ([P, \chi]u, \overline{b}(x, D)(\chi u))_{L^2(\pi_1(\mathrm{supp}(a)))} \\ &= (\chi P u, \overline{b}(x, D)(\chi u))_{L^2(\Omega)}.\end{aligned}$$

Con respecto al término $(P(\chi u), r(x, D)(\chi u))_{L^2(\Omega)}$, por compacidad se prueba que esta expresión es 0.
Es decir, dada la sucesión que converge débil, obtenemos la siguiente expresión

$$\begin{aligned}([A, P](\chi u_n), \chi u_n)_{L^2(\Omega)} &= (\chi P u_n, \overline{b}(x, D)(\chi u_n))_{L^2(\Omega)} + \\ &+ (P(\chi u_n), r(x, D)(\chi u_n))_{L^2(\Omega)} - (A(\chi u_n), \chi P u_n)_{L^2(\Omega)}.\end{aligned}$$

Ahora queremos hacer un estudio del símbolo principal.

$$\sigma_0([A,P]) = \frac{1}{i}\{a,p\}, \qquad \text{donde } a = \sigma_{1-m}(A) \text{ y } p = \sigma_m(P),$$

de modo que al multiplicar por i y tomar el límite obtenemos

$$\begin{aligned} J := \lim_{n\to\infty} i([A,P](\chi u_n), \chi u_n)_{L^2(\Omega)} = \lim_{n\to\infty} i[&(\chi P u_n, \overline{b}(x,D)(\chi u_n))_{L^2(\Omega)} + \\ &+ (P(\chi u_n), r(x,D)(\chi u_n))_{L^2(\Omega)} \\ &- (A(\chi u_n), \chi P u_n)_{L^2(\Omega)}]. \end{aligned}$$

Donde sabemos que el segundo término tiende a 0 por la estimación anterior. Para la primera expresión usamos que $\chi P u_n \to 0$ en $H^{1-m}_{comp}(\Omega)$ junto con que $\overline{b}(x,D)^*_{\chi_1} : H^{1-m}_{comp}(\Omega) \to L^2(\Omega)$, de modo que

$$|(\chi P u_n, \overline{b}(x,D)(\chi u_n))_{L^2(\Omega)}| \leq \|\overline{b}(x,D)^*_{\chi_1}(\chi P u_n)\|_{L^2(\Omega)} \|\chi u_n\|_{L^2(\Omega)} \to 0.$$

Luego basta demostrar que la tercer expresión converge a 0. Aquí usamos que

$$A : L^2_{comp}(\Omega) \to H^{m-1}_K(\Omega),$$

es un operador lineal y continuo. Por tanto mapea conjuntos acotados en conjuntos acotados. Aquí usamos que $\{A(\chi u_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ es un conjunto acotado de $H^{m-1}_K(\Omega)$ y por tanto,

$$|(A(\chi u_n), \chi P u_n)_{L^2(\Omega)} \leq \|A(\chi u_n)\|_{H^{m-1}_K(\Omega)} \|\chi P u_n\|_{H^{1-m}_K(\Omega)} \to 0.$$

Por la definición de la medida de defecto microloca:

$$0 = \lim_{n\to\infty}([A,P](\chi u_n),\chi u_n)_{L^2(\Omega)} = \int_{\Omega\times S^{d-1}} \sigma_0([A,P])d\mu = \int_{\Omega\times S^{d-1}} \{a,p\}(x,\xi)d\mu,$$

lo que concluye la demostración. □

Contents

1 Objetivo

2 Teorema de Propagación

3 Teorema sobre el soporte

Resultado previo

Theorem (Teorema A.7)

Sea X un espacio localmente compacto y Hausdorff. Sea μ una medida de Radon positiva en X.

1. *Sea N la unión de todos los abiertos $U \subset X$ tales que $\mu(U) = 0$. Entonces N es abierto y $\mu(N) = 0$. Definimos como $\text{supp}(\mu)$ al complemento de N.*
2. *$x \in \text{supp}(\mu)$ si y solo si $\int_X f d\mu > 0$ para toda $f \in C_0(X)$ tal que $f(x) > 0$.*

Idea de la Dem: La primera parte es clara. Para la segunda, podemos interpretarlo como

$$\langle \mu, f \rangle_{\mathcal{M}(X), C_0(X)} > 0, \quad \forall f \in C_0(X).$$

La parte difícil de la demostración es usar el lema de Urysohn.

Theorem (Teorema A.8)

Sea $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *una sucesión acotada en* $L^2_{loc}(\Omega)$ *que converge débil a 0 y admite una medida de defecto microlocal* μ. *Entonces* $(x_0,\xi_0)\notin \operatorname{supp}(\mu)$ *si y solo si existe un operador* $A\in\Psi^0_c(\Omega)$ *esencialmente homogéneo tal que* $\sigma_0(A)(x_0,\xi_0)\neq 0$ *y tal que* $A(\chi u_n)\to 0$ *en* $L^2(\Omega)$ *para todo* $\chi\in C_0^\infty(\Omega)$.

Idea Demostración Teorema A.8

Suponga que $(x_0, \xi_0) \in \text{supp}(\mu)$, la idea es construir el operador a mano. Defina $a(x,\xi) = \eta(x)\phi(x)\psi(\frac{\xi}{|\xi|})$, donde ϕ, ψ son cut-offs que valen 1 en una vecindad de x e $\xi|$, respectivamente y 0 en el infinito. Usamos además η una .ªnticutoff: vale 0 en 0, 1 en x_0 y 1 cerca del infinito. Sea A el operador definido por $a(\cdot,\cdot)$ y observe que $\sigma_0(A)(x_0,\xi_0) = 1$. Luego para todo $\chi \in C_0^\infty(\Omega)$,

$$\begin{aligned}\|A(\chi u_n)\|^2_{L^2(\Omega)} &= (A(\chi u_n), A(\chi_1 \chi u_n))_{L^2(\Omega)} \\ &= (A^*_{\chi_1} \circ A(\chi u_n), \chi u_n)_{L^2(\Omega)} \to \int_{\Omega \times S^{d-1}} |\sigma_0(A)(x,\xi)|^2 d\mu,\end{aligned}$$

donde usamos $\chi_1 = 1$ en una vecindad de $\text{supp}\,\chi$. Dado que $\text{supp}\,\sigma_0(A) \subset \text{supp}\,\phi \times \text{supp}\,\psi \subset \Omega \times S^{d-1} \setminus \text{supp}(\mu)$, tenemos que

$$\text{supp}\,\sigma_0(A) \cap \text{supp}\,\mu = \emptyset,$$

lo que nos dice que

$$\int_{\Omega \times S^{d-1}} |\sigma_0(A)|^2 d\mu = 0.$$

Por tanto $\|A(\chi u_n)\|_{L^2(\Omega)} \to 0$ en $L^2(\Omega)$.

Para la otra dirección, suponga que existe $A \in \Psi_c^0(\Omega)$ esencialmente homogéneo tal que $\sigma_0(A)(x_0, \xi_0) \neq 0$ que cumple $A(\chi u_n) \to 0$ en $L^2(\Omega)$. Del límite que calculamos previamente y la unicidad del límite, obtenemos que

$$\int_{\Omega \times S^{d-1}} |\sigma_0(A)|^2 d\mu = 0.$$

Por el Teorema anterior, parte 2, tenemos que

$$\int_{\Omega \times S^{d-1}} |\sigma_0(A)|^2 d\mu = 0 \iff \text{supp}(\sigma_0(A)) \cap \text{supp}(\mu) = \emptyset \iff (x_0, \xi_0) \notin \text{supp}(\mu).$$

□

Demostración Teorema A.9

Suponga que $Pu_n \to 0$ fuerte en $H^{-m}_{loc}(\Omega)$ para $m > 0$. Por definición, esto implica que para $\chi \in C_0^\infty(\Omega)$ se tiene que $\chi P u_n \to 0$ en $H^{-m}(\Omega)$. Como P es un operador propiamente soportado por ser un operador diferencial, existe $\psi \in C_0^\infty(\Omega)$ tal que

$$\chi P u_n = \chi P(\psi u_n), \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Es decir, si consideramos los operadores Λ como los operadores propiamente soportados de símbolo $(1+|\xi|^2)^{-m/2}$, obtenemos que el primer punto es equivalente a

$$\begin{aligned}(\Lambda^{-m}(\chi P(\psi u_n)), \Lambda^{-m}(\chi P(\psi u_n)))_{L^2(\Omega)} &= (\Lambda^{-2m}\chi P(\psi u_n), \chi P(\psi u_n))_{L^2(\Omega)} \\ &= (P^*\overline{\chi}\Lambda^{-2m}\chi P(\psi u_n), \psi u_n)_{L^2(\Omega)} \to 0.\end{aligned}$$

Defina entonces el operador $B = P^*\overline{\chi}\Lambda^{-2m}\chi P \in \Psi^0_c(\Omega)$, entonces su símbolo principal es

$$\sigma_0(B) = |\chi(x)|^2 |\sigma_m(P)(x,\xi)|^2 |\xi|^{-2m},$$

por la existencia de las medidas de defecto microlocal se tiene

$$\lim_{n\to\infty} \|\Lambda^{-m}(\chi P(\psi u_n))\|^2_{L^2(\Omega)} = \int_{\Omega\times S^{d-1}} |\chi(x)|^2 |\sigma_m(P)(x,\xi)|^2 |\xi|^{-2m} d\mu(x,\xi) = \int_{\Omega\times S^{d}}$$

Donde usamos que el símbolo es homogéneo en la coordenada ξ. Por el Teorema A.7 y Teorema A.8 tenemos las equivalencias,

$$\int_{\Omega \times S^{d-1}} |\chi(x)|^2 |\sigma_m(P)(x,\xi)|^2 d\mu(x,\xi) = 0 \iff \text{supp}(\sigma_m(P)) \cap \text{supp}(\mu) = \emptyset,$$

pero esto último es equivalente a decir que

$$\text{supp}(\mu) \subseteq (\text{supp}(\sigma_m(P)))^c = \sigma_m^{-1}(0) = \{(x,\xi) \in \Omega \times S^{d-1} : \sigma_m(P) = 0\}.$$

Lo que prueba la equivalencia. □